**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia**

***Campus* Valença**

**Noelí de Jesus Carvalho**

# A Matemática das Cônicas: aplicações das formas elíptica e parabólica

**Valença – BA**

**2025**

**Noelí de Jesus Carvalho**

# A Matemática das Cônicas: aplicações das formas elíptica e parabólica

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, *Campus* Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Roque da Silva Lyrio

**Valença – BA**

**2025**

# FICHA CATALOGRÁFICA

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DO IFBA, COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

C331m Carvalho, Noelí de Jesus

A matemática das Cônicas: aplicações das formas elíptica e parabólica / Noelí de Jesus Carvalho; orientador Roque da Silva Lyrio -- Valença : IFBA, 2025.

58f

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal da Bahia, 2025.

1. Aplicações matemáticas. 2. Cônicas. 3. Elipse. 4. Parábola. 5. Geometria Analítica I. Lyrio, Roque da Silva, orient. II. TÍTULO.

CDD:516.3

**Noelí de Jesus Carvalho**

# A Matemática das Cônicas: aplicações das formas elíptica e parabólica

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, *Campus* Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Monografia aprovada em ___/___/___.

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Me. Roque da Silva Lyrio (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

_____

Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

_____

Prof. Esp. Ruth da Silva Araújo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Valença - BA, ___ de _____ de 2025.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder força, saúde e perseverança para trilhar esse caminho, sempre guiando meus passos e me sustentando em todos os momentos mais desafiadores. Ao meu orientador, Roque da Silva Lyrio, pelas contribuições, paciência e dedicação para tornar possível a realização desse trabalho. Aos membros da banca, Diogo Soares Dórea da Silva e Ruth da Silva Araújo, pela disponibilidade em avaliar este estudo e pelas observações que contribuíram para o enriquecimento desse estudo.

Aos professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica na graduação, cada um deixando sua marca e contribuindo para o meu aprendizado. À minha família, base e sustentação de toda essa caminhada, pelo incentivo, pelas palavras de apoio para que eu não desistisse e tivesse força para continuar e pela compreensão nos momentos em que precisei priorizar os estudos. Em especial à minha mãe, Joceli Barbosa de Jesus Carvalho, e ao meu pai, Sidnei Santos de Carvalho, por todo amor, cuidado e apoio, e à minha tia, Daiane Barbosa de Jesus, pelos incentivos e colaboração para que esse projeto se concretizasse.

Aos amigos e colegas de curso, que partilharam comigo conhecimentos, conversas, risadas e companheirismo, tornando a caminhada mais leve e significativa, em especial Jackson Silva dos Santos, Germano Ramos dos Santos, Maria Elysa Alves Moreira, Carolaine Costa Morais, Flaviane Paixão Panta, Maélly de Brito Roma e Robson Jesus dos Santos.

E por fim, a todos que, de alguma forma, contribuíram para a concretização desse trabalho e para a minha formação pessoal e acadêmica, deixo aqui meu sincero agradecimento.

## RESUMO

O presente trabalho explora os conceitos matemáticos das seções cônicas, com foco nas formas elíptica e parabólica, analisando suas propriedades e aplicações em diversas áreas do conhecimento. A pesquisa se baseia em revisão bibliográfica, utilizando livros, artigos e dissertações para fundamentação teórica. Inicialmente, é apresentada uma contextualização histórica da Matemática e Geometria Analítica seguindo para a abordagem das cônicas, desde sua origem na Antiguidade até seu desenvolvimento no âmbito da matemática moderna. Em seguida, são abordadas as características e propriedades analíticas das elipses e parábolas, destacando suas equações e representações geométricas. Além disso, são discutidas aplicações práticas dessas curvas, como numa mesa de bilhar elíptica e num fogão solar parabólico, construído a partir de uma antena parabólica, enfatizando o funcionamento de suas propriedades. O estudo evidencia a relevância das formas cônicas na resolução de problemas reais e sua presença em diversos campos científicos.



**Palavras-chave:** cônicas; elipse; parábola; aplicações matemáticas.

## ABSTRACT

The present work explores the mathematical concepts of conic sections, focusing on elliptic and parabolic forms, analyzing their properties and applications in various fields of knowledge. The research is based on a bibliographic review, using books, papers, and dissertations as a theoretical foundation. Initially, a historical contextualization of Mathematics and Analytic Geometry is presented, followed by an approach to conic sections, from their origin in Ancient to their development in modern mathematics. Then, the analytical characteristics of ellipses and parabolas are addressed, highlighting their equations and geometric representations. Additionally, practical applications of these curves are discussed, such as elliptical billiard tables and parabolic stoves, emphasizing the functioning of their properties. This study highlights the relevance of conic sections in solving real-world problems and their presence in various scientific fields.



**Keywords:** conics; ellipse; parabola; mathematical applications.

## SUMÁRIO


**1 INTRODUÇÃO ..... 7**

**2 A EVOLUÇÃO DA MATEMÁTICA ..... 9**

**2.1 Sistemas de numeração ..... 11**

**2.2 A matemática grega ..... 13**

**2.3 Origem e evolução da Geometria Analítica ..... 17**

**3 CÔNICAS ..... 20**

**4 PARÁBOLA ..... 23**

**5 ELIPSE ..... 26**

**6 PROPRIEDADES DE REFLEXÃO ..... 33**

**7 APLICAÇÕES ..... 41**

**7.1 Fogão parabólico ..... 41**

**7.2 Mesa elíptica ..... 46**

**8 SEQUÊNCIA DIDÁTICA ..... 49**

**8.1 Fogão parabólico ..... 50**

**8.2 Mesa elíptica ..... 52**

**9 CONSIDERAÇÕES FINAIS ..... 55**

**REFERÊNCIAS ..... 56**

# 1 INTRODUÇÃO

No século XVII, a Matemática passou por transformações significativas, principalmente na Geometria. Durante esse período, surgiu a integração de métodos geométricos e algébricos originando a Geometria Analítica. Essa inovação possibilitou a formulação de equações que descrevem curvas e superfícies no plano cartesiano e no espaço, transformando radicalmente o pensamento matemático e abrindo caminho para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Apesar de sua importância para a Matemática e para diversas áreas do conhecimento, a Geometria Analítica representa um desafio significativo para muitos estudantes em sala de aula. Compreender a ligação entre equações e formas geométricas exige não só pensamento lógico, mas também a habilidade de imaginar e interpretar esses conceitos de maneira conectada. Muitas vezes, a dificuldade surge na transição entre a linguagem algébrica e a sua representação.

O avanço e desenvolvimento das ciências matemáticas têm proporcionado novas formas de compreender e aplicar conceitos fundamentais no dia a dia. No contexto da Geometria Analítica, as cônicas, elipse e parábola, possuem aplicações práticas que vão além das aplicações contidas nos livros didáticos, sendo essenciais para diversos fenômenos físicos e tecnológicos. No ensino médio, a abstração matemática muitas vezes dificulta a compreensão desses conceitos, tornando desafiador para os estudantes visualizarem como as propriedades geométricas das cônicas influenciam o mundo ao seu redor. A elipse, por exemplo, está presente no design de mesas de bilhar elípticas, nas quais a trajetória das bolas é determinada por seus focos. Já a parábola é amplamente utilizada em superfícies refletoras, como antenas parabólicas, fogões solares e iluminação, devido à sua capacidade de concentrar ondas e calor em um único ponto focal. Esses exemplos ilustram como as propriedades das cônicas podem ser exploradas para otimizar tecnologias e facilitar soluções inovadoras.

Diante desse cenário, esta pesquisa tem como objetivo analisar e demonstrar a importância da Geometria Analítica em aplicações cotidianas, com foco nas cônicas, elipse e parábola. Para isso, o estudo investigará as características e propriedades dessas curvas, apresentará seu contexto histórico e explorará suas aplicações práticas, como a mesa de bilhar elíptica e o fogão solar parabólico, evidenciando como os conceitos matemáticos influenciam situações reais e tecnológicas do dia a dia. Para organizar o estudo e facilitar a compreensão, a pesquisa seguirá uma sequência na qual inicialmente, será apresentada uma contextualização histórica da Matemática e da Geometria Analítica, mostrando sua evolução desde a Antiguidade

até a matemática moderna. Em seguida, serão analisadas as características e propriedades analíticas das elipses e parábolas, incluindo suas equações e representações geométricas. Por fim, serão exploradas as aplicações práticas dessas curvas, como a mesa de bilhar elíptica e o fogão solar parabólico construídos a partir de uma antena parabólica, demonstrando o funcionamento de suas propriedades e como a Matemática está presente em situações reais.

Esses objetos podem ser utilizados como instrumento de estudo no qual pode ser analisado o seu funcionamento junto às suas propriedades, tornando o aprendizado mais concreto e acessível aos estudantes do ensino médio. Para isso, serão analisados o comportamento dos focos da elipse e a funcionalidade da parábola na concentração de energia, demonstrando como a Matemática está presente em situações reais. Compreender essas aplicações não apenas amplia o conhecimento sobre a Geometria Analítica, mas também contribui para tornar o ensino da Matemática mais atrativo e significativo. Dessa forma, espera-se que esta pesquisa forneça subsídios para práticas pedagógicas que aproximem os estudantes da compreensão e aplicação da Matemática Aplicada, promovendo uma aprendizagem mais envolvente e contextualizada.

# 2 A EVOLUÇÃO DA MATEMÁTICA

A Matemática que é estudada nos tempos atuais não surgiu de repente, é resultado de uma longa trajetória histórica que acompanhou o desenvolvimento das primeiras civilizações. Durante a Idade da Pedra[1], que teve início há cerca de 5 milhões de anos, os primeiros hominídeos, como o *Homo Erectus*[2] e o *Homo Sapiens*[3], já mostravam inteligência ao fabricar ferramentas rudimentares e desenvolver formas primitivas de comunicação. Contudo, o estilo de vida nômade limitava um avanço mais estruturado do conhecimento matemático. Por volta de 30000 a.C., o *Homo Sapiens* começou a formar sociedades mais organizadas, favorecendo o desenvolvimento da linguagem, arte e religião.

> Para recapitular, a Idade da Pedra durou vários milhares de anos, começando talvez já em 5 milhões a.C. e indo até por volta de 3000 a.C. Num mundo de vastas pastagens e savanas onde abundavam os animais selvagens e as pessoas eram principalmente caçadores e colhedores. Suas vidas eram agrestes e difíceis, de maneira que elas viviam demasiado ocupadas e em permanente agitação para poderem desenvolver tradições científicas. Depois de 3000 a.C. emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio e ao longo do rio Amarelo na China. Essas comunidades criaram culturas nas quais a ciência e a matemática começam a se desenvolver. (EVES, 2011, p. 24)

A partir desse novo contexto, foi permitido que surgissem as primeiras expressões do pensamento matemático, motivadas pela necessidade de contar e registrar eventos importantes, como a data das colheitas. Assim, foram criados sistemas simples de contagem e também, os primeiros calendários.

A Idade da Pedra, apesar de sua longa duração, não ocorreu de forma simultânea em todas as regiões do mundo. Algumas populações, como grupos indígenas nas Américas, na Austrália e no sul da África, ainda viviam nesse período até os séculos XIX e XX. Contudo, evidências mostram que esse período terminou por volta de 3000 a.C., com o surgimento da fundição de metais em civilizações da China, Índia e Oriente Médio. Para facilitar o estudo dessa época, os historiadores dividiram a Idade da Pedra em três períodos: o Paleolítico[4] (5 milhões a 10000 a.C.), o Mesolítico[5] (10000 a 7000 a.C.) e o Neolítico[6] (7000 a 3000 a.C.). No

[1] Período da pré-história em que os seres humanos viviam de maneira nômade. (GOMES, 2018)
[2] Espécie antecessora que surgiu há cerca de 1,5 milhões de anos. (MEHL, 2022)
[3] Semelhante a nós em termos de habilidade e inteligência surgiram há, no máximo, 300 mil anos. (MEHL, 2022)
[4] Período mais antigo da Idade da Pedra, caracterizado pela utilização de pedras e caça. (GOMES, 2018)
[5] Período onde houve uma transição para formas mais complexas de caça e coleta. (GOMES, 2018)
[6] Período final da Idade da Pedra, caracterizado pela agricultura, domesticação de animais e a formação das primeiras aldeias. (GOMES, 2018)

Neolítico as comunidades deixaram de depender exclusivamente da caça e coleta, passaram a cultivar plantações e criar animais para seu próprio sustento, ainda que de forma rudimentar. Esse avanço marcou uma mudança significativa na organização social e econômica, estabelecendo as bases para o desenvolvimento futuro do conhecimento humano, incluindo a Matemática.

Ao iniciar o estudo da História da Matemática, surge a incerteza de "Quando, como e onde começou a Matemática?". Muitos afirmam que seu ponto de partida está nas primeiras deduções sistemáticas em Geometria, atribuídas a Tales de Mileto por volta de 600 a.C.. Tales foi reconhecido como o primeiro pensador racionalista crítico, que não apenas buscava compreender a natureza (*phýsis*) e a harmonia do universo (*kosmo*), mas também rompeu com explicações místicas ao apresentar fundamentos matemáticos para fenômenos naturais. Sua pedagogia, baseada na moderação (*sophrosýne*) e no uso da razão, incentivou seus discípulos a questionarem e aprimorarem seus ensinamentos. Durante sua convivência com sacerdotes egípcios, Tales assimilou saberes matemáticos e os aplicou em desafios práticos, como o cálculo da altura de pirâmides e a determinação da distância de navios no mar. Embora não tenha criado esses métodos, sua contribuição consistiu em utilizá-los de maneira inovadora, consolidando sua influência na Matemática e garantindo seu lugar entre os Sete Sábios da Grécia[7].

O começo da Matemática é um tema que gera diferentes perspectivas. Alguns afirmam, segundo Eves em seu livro *Introdução à História da Matemática*, que suas primeiras expressões começaram nas civilizações da Mesopotâmia e do Egito por meio das fórmulas de mensuração, enquanto outros acreditam que seus primeiros indícios remontam aos esforços do homem pré-histórico em organizar grandeza, forma e número. Eves também afirma que ainda há aqueles que defendem que a Matemática já se apresentava em tempos pré-orgânicos, manifestando-se na natureza, como nas formas das plantas, nebulosas e cristalizações minerais. Platão, por exemplo, afirmava que a Matemática sempre existiu e apenas aguardava para ser descoberta. No entanto, por convenção, considera-se que seu início se deu com os primeiros esforços humanos, aplicando ideias matemáticas de maneira prática. Evidências arqueológicas sugerem que, há cerca de 50000 a.C., o homem já sabia contar, possuindo um senso numérico inato que lhe permitia reconhecer aumentos e diminuições em pequenos grupos de objetos. Com o avanço das sociedades, a contagem simples tornou-se essencial, auxiliando na organização de rebanhos, na identificação do número de membros de uma tribo e na estimativa de inimigos, consolidando

[7] Tales de Mileto, Bias de Priene, Sólon de Atenas, Pítaco de Mitilene, Cleóbulos de Lindos, Periandro de Corinto e Quílon de Lacedemonia. (SEMANÁRIO, 2020)

sua importância desde os primórdios da humanidade.

## 2.1 Sistemas de numeração

Ao longo do tempo foi necessário efetuar contagens mais extensas, e com isso, o processo de contagem teve de ser sistematizado, organizando os números em grupos chamados bases. A base 10, por ser intuitivamente ligada ao uso dos dedos, tornou-se a mais comum, influenciando a formação de palavras em diversos idiomas. Por exemplo, no inglês: “ten = dez” e “fifteen = quinze”, e no português, a base decimal é evidente em números como dezesseis, dezessete, dezoito, mostrando como o conceito de dez continua presente na construção dos nomes dos números. No entanto, outras bases foram amplamente utilizadas, como as menores (2, 3 e 4), presentes em tribos da Austrália e América do Sul. A base 12 destacou-se na Antiguidade devido à sua relação com os meses lunares e à facilidade de cálculos proporcionada por seus múltiplos divisores, deixando marcas em expressões como “dúzia” e “grosa”. Já a base 20, possivelmente originada pelo uso simultâneo dos dedos das mãos e dos pés na contagem, teve grande importância em algumas civilizações. O sistema sexagesimal, de base 60, amplamente adotado pelos babilônios, foi essencial para cálculos avançados e permanece na medição do tempo e dos ângulos.

> É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. (EVES, 2011, p. 26)

Esses diferentes sistemas numéricos foram fundamentais para a evolução da Matemática, influenciando medições e registros ao longo da história.

As primeiras manifestações matemáticas surgiram nas civilizações do Oriente Antigo, localizadas ao longo dos grandes rios, como o Nilo, Tigre, Eufrates, Indo e Yangtze. No início, a Matemática era estritamente prática, focada em aritmética e mensuração, mas, ao longo do tempo, evoluiu para conceitos mais abstratos, resultando no surgimento da Álgebra e também da Geometria. As tábuas de argila descobertas nessas civilizações indicam que, desde 3000 a.C., os babilônios já utilizavam um sistema posicional sexagesimal para realizar cálculos e esses registros mostram o uso da Matemática em transações comerciais, incluindo práticas financeiras sofisticadas, como faturas, hipotecas, notas promissórias e cálculos de juros simples e compostos. Além disso, foram encontradas cerca de 400 tábuas contendo tabelas de

multiplicação, quadrados, cubos e até exponenciais, evidenciando um sistema aritmético bastante avançado para a época.

Entre 2000 a.C. e 1600 a.C., a geometria babilônica se consolidou e passou a ser aplicada na medição de áreas e volumes. Eves aponta em seu livro que os babilônios sabiam calcular áreas de figuras como retângulos e triângulos e volumes de sólidos como paralelepípedos e cilindros e também possuíam conhecimento sobre a proporcionalidade dos lados de triângulos retângulos e propriedades geométricas fundamentais. A famosa tábua de Plimpton[8], datada de 1600 a.C., comprova que eles já utilizavam equações quadráticas e cúbicas para resolver problemas relacionados a volumes de troncos de pirâmides. Foi registrado que uma das maiores contribuições dos babilônios para a Matemática foi a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais, um sistema ainda em uso nos dias atuais. De acordo com o historiador Otto Neugebauer, essa escolha pode estar relacionada a uma antiga unidade de medida chamada "milha babilônica", equivalente a sete milhas atuais. Todo esse conhecimento mostra que, desde os primórdios, a Matemática foi uma ferramenta essencial para a organização das primeiras sociedades e continuou evoluindo ao longo dos séculos.

> Indubitavelmente devemos aos babilônios antigos a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais. Diversas explicações já foram aventadas para a razão dessa escolha, mas nenhuma é tão plausível como a que se segue, sustentada pela imensa autoridade de Otto Neugebauer. Nos remotos tempos dos sumérios, existia uma unidade de medida grande, uma espécie de milha babilónica, igual a sete das milhas atuais. Como a milha babilónica era usada para medir distâncias mais longas, era natural que viesse a se transformar numa unidade de tempo, a saber, o tempo necessário para se percorrer uma milha babilónica. Mais tarde, talvez no primeiro milênio a.C., quando a astronomia babilónica atingiu o estágio de manter registros sistemáticos de fenômenos celestes, a milha-tempo babilónica foi adotada para a mensuração de espaços de tempo. Como se determinou que um dia era formado de 12 milhas-tempo, e um dia completo equivale a uma revolução do céu, dividiu-se um ciclo completo em 12 partes iguais. Mas, por conveniência, a milha-tempo babilónica fora dividida em 30 partes iguais. Dessa forma chegamos a (12)(30) = 360 partes iguais num ciclo completo. (EVES, 2011, p. 62)

Todo esse período era baseado no sistema sexagesimal, tendo como sua base 60. Esse sistema era posicional, em que cada símbolo possuía o seu valor e dependia de uma certa posição para estabelecer o número.

A evolução do sistema numérico teve marcos fundamentais ao longo da história. Os primeiros registros do sistema de numeração indo-arábico surgiram na Índia por volta de 250 a.C., gravados em colunas de pedra, contudo, esses numerais ainda não apresentavam a ideia

[8] Datada aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C., contém uma variedade de informações matemáticas. Os babilônios elaboraram regras e fórmulas para o cálculo de áreas, volumes e perímetros em tábuas como essa. (EDUARDO, 2024)

de valor posicional nem incluíam o zero. Além desses registros, há evidências encontradas em cavernas próximas à cidade de Poona, na Índia.

> [...] encontram-se em registros talhados por volta do ano 100 a.C. nas paredes de uma caverna numa colina perto de Poona e em algumas inscrições de por volta do ano 200 d.C., gravadas nas cavernas de Nasik. Essas primeiras amostras não contêm nenhum zero e não utilizam a notação posicional. (EVES, 2011, p. 40)

Somente por volta de 800 d.C., a introdução do número zero e do sistema posicional ocorreu, sendo documentada pelo matemático persa Al-Khowârizmí[9] em 825 d.C., quando ele descreveu detalhadamente o sistema numérico hindu. Esse conhecimento foi posteriormente transmitido para a Europa Ocidental por meio dos árabes através das navegações e transações comerciais, tornando-se a base do sistema utilizado atualmente.

## 2.2 A matemática grega

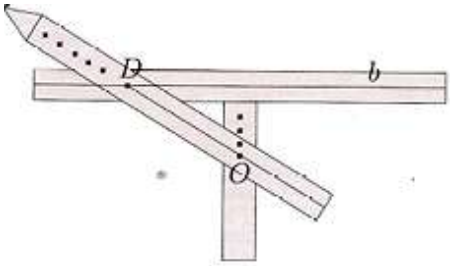
Por volta de 300 a.C., na matemática grega, três grandes linhas de desenvolvimento se destacaram. A primeira envolveu a organização dos conhecimentos geométricos que culminaram em *Os Elementos* de Euclides. A segunda linha de estudo se concentrou no conceito de infinitésimos e infinitos, que só seriam plenamente compreendidos com o advento do cálculo na era moderna. E, a terceira grande vertente foi a chamada geometria superior, que se desenvolveu a partir da tentativa de resolver três problemas clássicos: a duplicação do cubo (determinar o lado de um cubo cujo volume seja o dobro de outro dado), a trissecção do ângulo (dividir um ângulo qualquer em três partes iguais) e a quadratura do círculo (construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado). Esses desafios se mostraram impossíveis de serem resolvidos com régua e compasso, mas impulsionaram importantes avanços matemáticos, como o estudo das secções cônicas e curvas cúbicas, além de contribuições para a teoria das equações e dos números algébricos.

Somente no século XIX, mais de dois mil anos depois da formulação desses problemas, foi matematicamente demonstrado que essas construções são impossíveis com régua e compasso, seguindo as regras da geometria euclidiana. O compasso euclidiano (Figura 1), diferente do moderno, desmontava-se ao ser levantado do papel, impossibilitando o transporte de distâncias, no entanto, apesar das diferenças, ambos se mostraram equivalentes em suas

[9] Considerado o pai da álgebra, seu trabalho foi propagado graças a Leonardo Fibonacci, matemático italiano que orientou e encorajou europeus na adoção dos numerais indo-arábicos. (IMPA, 2020)

aplicações matemáticas. Vale destacar que o insucesso em resolver esses problemas não se devia apenas ao fato de o compasso ser desmontável, mas sim às limitações intrínsecas da geometria euclidiana, que tornavam certas construções, como a trissecção de um ângulo ou a quadratura do círculo, impossíveis de serem realizadas apenas com régua e compasso.

Figura 1 – Compasso Euclidiano




Fonte: VELOSO, E., 2005.

O estudo das construções geométricas com régua e compasso, dentro das limitações impostas pelos postulados de Euclides, revelou-se um dos desafios mais instigantes da Matemática.

Euclides foi considerado um dos matemáticos mais importantes da Antiguidade, tendo compilado, na obra *Os Elementos*, o conhecimento matemático disponível na época. Seu trabalho teve um impacto tão profundo que obscureceu registros anteriores, especialmente aqueles baseados nos estudos egípcios e babilônicos. Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, mas acredita-se que ele tenha estudado em Atenas, o que explica sua forte influência da escola platônica. Seu maior feito foi a criação de um modelo objetivo baseado em definições, postulados e axiomas, a partir dos quais desenvolveu a geometria euclidiana, um sistema que permaneceu predominante, embora questionado, por mais de dois mil anos, até o surgimento das geometrias não euclidianas no século XIX.

Durante mais de dois mil anos, a obra dominou o ensino da Geometria, sendo considerada, depois da Bíblia, o livro mais estudado e publicado, com mais de mil edições desde 1482, porém, infelizmente, nenhuma cópia original de *Os Elementos* sobreviveu até os dias atuais. As edições modernas baseiam-se principalmente em uma revisão feita por Têon de Alexandria, cerca de 700 anos após Euclides. Até o início do século XIX, essa versão era a mais antiga conhecida. No entanto, em 1808, durante a expedição de Napoleão, François Peyrard encontrou na Biblioteca do Vaticano uma cópia do século X, anterior à revisão de Têon. Estudos indicam que, embora o material introdutório tenha sofrido alterações ao longo dos séculos, os teoremas e demonstrações permaneceram essencialmente fiéis ao original de Euclides.

Antes de Euclides, outras tentativas de organizar o conhecimento geométrico foram feitas. Hipócrates de Quio foi o primeiro a compilar um conjunto de proposições geométricas, seguido por Lêon, que ampliou e aperfeiçoou essa seleção. A Academia de Platão também possuía *Os Elementos*, organizados por Teúdio de Magnésia, cuja obra influenciou diretamente Euclides. Além disso, ele teve acesso aos estudos de Teeteto e Eudoxo. Assim, sua grande contribuição não foi criar do zero os conceitos geométricos, mas organizá-los de forma sistemática e lógica, estabelecendo um modelo que perdurou por séculos. Sua obra, embora tenha sido um marco na organização matemática, acabou tornando obsoletos muitos estudos anteriores, resultando na perda de diversos conhecimentos desenvolvidos nos primeiros séculos da Matemática grega.

> *Os Elementos* de Euclides abrem as portas para uma geometria logicamente organizada, construída passo a passo – ou melhor, enunciado a enunciado – e demonstrada de modo que o logos[10] não conclui outra coisa senão o que ali lhe é apresentado. É uma geometria praticamente inquestionável, limítrofe, a linha divisória entre o humano e o divino, entre o perene e o eterno, entre a verdade e aquilo que se manifesta pelos sentidos. (MONTOITO, GARNICA, 2014, p. 105)

A citação acima evidencia a dimensão quase metafísica atribuída à geometria euclidiana, uma construção lógica rigorosa que beirava o divino pela sua aparente perfeição. Esse caráter da Matemática como um saber puro, organizado segundo a razão, remete diretamente às reflexões de Lloyd sobre o pensamento grego antigo. Segundo Lloyd, a Geometria grega, especialmente a euclidiana, não era apenas uma prática técnica, mas também um modelo de racionalidade.

Montoito e Garnica (2014) abrangem também reflexões de Lloyd no qual:

> [...] questiona esta aura que a obra de Euclides desfrutou ao longo de tantos séculos em seus estudos sobre a sociedade grega. Segundo ele, não é por terem sobrevivido que *Os Elementos* podem ser julgados como a melhor obra científica de qualquer período da Antiguidade pois, muitas vezes, um importante tratado de síntese eclipsava obras de grande originalidade e conteúdos, originando um tipo de regra da sobrevivência dos mais aptos: o "mais apto", porém, "muito amiúde não significava o mais adiantado, mas sim o mais fácil de compreender, a obra popular e não a especializada". (LLOYD, 1998) *apud* (MONTOITO, GARNICA, 2014, p. 105)

É possível destacar a necessidade de relativizar o prestígio histórico da obra *Os Elementos*, de Euclides. O autor traz uma reflexão sobre o fato de que a sobrevivência de certos textos ao longo dos séculos não garante, por si só, sua superioridade científica. Muitas vezes,

[10] Significa "falar" ou "discutir". Pode ser interpretado como o ato de falar. É frequentemente interpretado como a "Palavra de Deus". (CIDESP, 2025)

como Lloyd aponta, a permanência de uma obra está ligada à sua acessibilidade e popularização, e não necessariamente à sua originalidade ou sofisticação teórica**.**

> De certo temos, porém, que a obra de Euclides serviu para os matemáticos de todas as épocas como exemplo de proceder quanto ao desenvolvimento de uma teoria e como modelo de como raciocinar e demonstrar matematicamente, além de apresentar um compêndio de resultados e verdades matemáticas aceitas que ajudariam no desenvolvimento da matemática. (GASCA, 2007) *apud* (MONTOITO, GARNICA, 2014, p. 105)

Por conta disso, diferente da Matemática do Egito e da Babilônia, não se encontra fontes diretas que relatem o estudo da Matemática grega primitiva, com isso, é preciso confiar em manuscritos e relatos que foram escritos há muitos séculos depois dos originais.

A principal fonte de informações sobre os primeiros passos da Matemática grega é o sumário Eudemiano de Proclo[11], no qual é um resumo do desenvolvimento da Geometria grega, desde seus primeiros tempos até a obra de Euclides. Proclo (412 – 485) foi um filósofo e matemático grego que fez contribuições significativas, principalmente ao comentar as obras de Euclides. Ele teve acesso a muitos trabalhos antigos e críticos que se perderam com o tempo, exceto por alguns fragmentos e menções que foram preservados por ele e outros matemáticos. Um desses trabalhos perdidos foi um resumo escrito por Eudemo, referente à história da Geometria grega até 335 a.C. Eudemo (370 – 300 a.C.) foi um filósofo e matemático grego, discípulo de Aristóteles, que transmitia e desenvolvia as ideias aristotélicas. Ele também contribuiu para o estudo da Geometria e alcançou diversos teoremas geométricos que, acredita-se, foram servidos como uma base para o trabalho de Euclides. O nome "Sumário Eudemiano" se deve aos estudos e trabalhos feitos por Eudemo.

O Sumário de Eudemo menciona vários nomes que contribuíram para a Geometria grega, dentre eles, Pitágoras. A história de Pitágoras e suas contribuições à Matemática estão envoltas em mistério devido à forte influência de seus seguidores, que atribuíram a ele todas as descobertas da Escola Pitagórica. Acredita-se que ele tenha nascido por volta de 572 a.C., na ilha de Samos, na Grécia, e que tenha sido discípulo de Tales. Em sua busca por conhecimento, viajou para o Egito, onde aprofundou seus estudos, e posteriormente migrou para Crotona, no sul da Itália, onde fundou a Escola Pitagórica. Mais do que um grupo de estudos, essa escola funcionava como uma irmandade com rituais secretos e tradições próprias. Seu pensamento filosófico estava fundamentado na ideia de que a essência da matéria e da existência humana

[11] Consiste nas páginas de abertura do Comentário sobre Euclides, Livro I, de Proclo e é um breve resumo do desenvolvimento da geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides. (NEIVA, 2023)

estava na natureza dos números inteiros. Essa concepção levou ao aprofundamento no estudo das propriedades numéricas, na Aritmética e na Geometria. Como os ensinamentos da escola eram transmitidos oralmente e todas as descobertas eram atribuídas a Pitágoras, é difícil determinar quais resultados foram de fato seus e quais foram desenvolvidos por seus discípulos.

A Escola Pitagórica influenciou significativamente a Matemática ao associar números a formas geométricas, promovendo uma visão estruturada do conhecimento matemático. Um de seus principais legados é o Teorema de Pitágoras, que estabelece uma relação fundamental entre os lados de um triângulo retângulo, determinando que o quadrado do comprimento da hipotenusa equivale à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Além disso, os pitagóricos aprofundaram-se no estudo das proporções e da Teoria dos Números, analisando padrões numéricos e identificando conceitos como os números figurados[12] e os números perfeitos[13]. Contudo, um dos momentos mais marcantes da escola foi a descoberta dos números irracionais, ao investigarem a relação entre a diagonal e o lado de um quadrado. Essa descoberta, contrariava a crença de que todas as grandezas poderiam ser expressas como razões entre números inteiros, gerando uma crise conceitual dentro da escola.

A descoberta dos números irracionais representou um desafio significativo para os fundamentos matemáticos da época, uma vez que contrariava a concepção pitagórica de que toda grandeza poderia ser expressa como razão entre números inteiros. Diante desse conflito, tornou-se necessário aprimorar os métodos de estudo das proporções, levando ao desenvolvimento de uma abordagem matemática mais estruturada e rigorosa. Esse avanço foi consolidado com a adoção do método axiomático, que permitiu a organização lógica da Geometria e favoreceu sua evolução sistemática, abrindo caminho para futuras interseções entre Álgebra e Geometria, que mais tarde dariam origem à Geometria Analítica.

## 2.3 Origem e evolução da Geometria Analítica

No século XVII, a Matemática passou por transformações significativas, principalmente na Geometria. Durante esse período, surgiu a integração de métodos geométricos e algébricos originando a Geometria Analítica. Dois matemáticos franceses foram essenciais para o avanço desse estudo, René Descartes e Pierre de Fermat, no qual deram um passo fundamental ao introduzir a utilização de coordenadas numéricas para representar figuras geométricas, criando,

[12] Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo entre a Geometria e a Aritmética. (MILANI, 2011)
[13] Aqueles que se igualam à soma de seus divisores próprios. (OBMEP, 2016)

assim, a Geometria Analítica. Essa inovação possibilitou a formulação de equações que descrevem curvas e superfícies no plano cartesiano, transformando radicalmente o pensamento matemático e abrindo caminho para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

A ideia de coordenadas foi usada também no mundo antigo pelos egípcios e romanos, na agrimensura, e pelos gregos na confecção de mapas. Apolônio, por exemplo, um grande matemático grego da Antiguidade, deduziu a base de sua geometria direcionando às secções cônicas.

> Nicole Oresme, antecipou outros aspectos da Geometria Analítica ao representar graficamente certas leis, confrontando a variável dependente (latitudo) com a independente (longitudo), à medida que se permitia que esta última sofresse pequenos acréscimos. Os que defendem Oresme como o inventor da Geometria Analítica argumentam com esse aspecto de seu trabalho, que seria a primeira manifestação explícita da equação da reta, e com algumas outras noções a que ele chegou envolvendo espaços de dimensões superior. Um século depois de ter sido escrito, o texto de Oresme mereceu várias tiragens; daí que pode ter influenciado matemáticos posteriores. (EVES, 2011, p. 382)

As considerações anteriores em relação a este campo ainda trazem divergências de opinião sobre quem inventou a Geometria Analítica e a época para que possa merecer o crédito dessa invenção.

Com as contribuições de Apolônio e Nicole Oresme, René Descartes e Pierre de Fermat puderam fazer um desenvolvimento ainda maior na área, definindo melhor seus conceitos e consolidando o método no qual consistia em transformar problemas geométricos em algébricos por meio do uso de coordenadas e equações. Foi-se utilizado o simbolismo algébrico para investigar curvas e suas propriedades, como tangentes, áreas e comprimentos, de forma sistemática e prática. No *Discurso sobre o Método* (1637), René Descartes apresentou suas ideias entre as quais se destaca o apêndice *La Géométrie,* no qual introduziu o conceito de coordenadas mostrando também que curvas poderiam ser descritas por meio de equações.

Pierre de Fermat e René Descartes foram fundamentais para o surgimento da Geometria Analítica, cada um contribuindo de forma complementar. Enquanto Fermat partia das equações para explorar curvas, aplicando a Álgebra na resolução de problemas envolvendo tangentes e áreas, Descartes fez a integração da Geometria e a Álgebra de maneira sistemática. Fermat lançou bases essenciais para o cálculo, enquanto Descartes consolidou um método analítico que revolucionou o pensamento matemático. Juntos, possibilitaram uma abordagem mais rigorosa para o estudo de curvas e superfícies, conectando teoria e prática. Esse avanço não apenas transformou a Matemática, mas também influenciou diversas áreas da ciência e tecnologia, permitindo a compreensão de padrões naturais e impulsionando descobertas que continuam a

impactar o mundo moderno.

Apesar de sua importância para a Matemática e para diversas áreas do conhecimento, a Geometria Analítica representa um desafio significativo para muitos estudantes em sala de aula. Compreender a ligação entre equações e formas geométricas exige não só pensamento lógico, mas também a habilidade de abstrair e interpretar esses conceitos de maneira conectada. Muitas vezes, a dificuldade surge na transição entre a linguagem algébrica e a representação geométrica, tornando essencial o uso de estratégias didáticas que facilitem essa compreensão. O emprego de recursos visuais, programas interativos e problemas contextualizados pode tornar o aprendizado mais acessível, aproximando os alunos da aplicação prática desse conhecimento. Superar os desafios da Geometria Analítica não só melhora a base matemática dos alunos, mas também amplia sua capacidade de pensar de forma lógica e resolver problemas em diversas áreas.

# 3 CÔNICAS

No século IV a.C., matemáticos como Arquimedes, Menecmo, Aristeu e Euclides começaram a investigar as cônicas. A origem do estudo das cônicas remonta à Grécia Antiga, surgindo inicialmente como uma tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo, que consistia em determinar o lado de um cubo de forma que seu volume fosse o dobro de outro já existente (Evangelista, 2023). Segundo Eves (2011), as seções cônicas eram inicialmente obtidas pela interseção de três tipos de cones com um plano paralelo a uma de suas geratrizes. No entanto, Apolônio de Perga introduziu uma abordagem mais ampla, considerando a interseção do plano com um cone circular duplo e reto.

Apolônio foi um dos matemáticos que mais aprofundaram os estudos sobre as cônicas. Em sua obra "Cônicas", ele estabeleceu os nomes parábola, elipse e hipérbole para classificar essas curvas, nomenclaturas que permanecem até os dias atuais (Evangelista, 2023). Antes dele, os gregos classificavam as cônicas a partir do ângulo do vértice do cone de revolução. Com Apolônio, a abordagem tornou-se mais abrangente, permitindo que todas as seções cônicas fossem analisadas a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo.

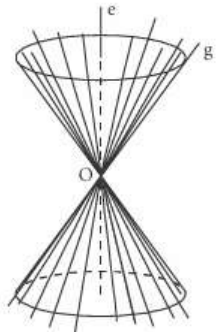
Apolônio, que possivelmente estudou em Alexandria, é considerado um dos maiores geômetras da Antiguidade, sendo muitas vezes comparado a Arquimedes. Seu legado foi fundamental para a Geometria, e suas definições ainda são utilizadas na Matemática moderna (Almeida, 2019). Após sua morte, a chamada "época de ouro" da Geometria grega chegou ao fim, com poucos avanços tão notáveis quanto os feitos por ele e seus predecessores. No entanto, matemáticos posteriores, como Heron de Alexandria, Menelau, Cláudio Ptolomeu e Papo de Alexandria, ainda contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Geometria (Almeida, 2019).

Atualmente, o estudo das cônicas é abordado de maneira analítica, por meio de equações que descrevem matematicamente suas propriedades e sua relação com os sistemas de coordenadas. Cada tipo de cônica (circunferência, elipse, parábola e hipérbole) possui uma equação característica, que pode ser expressa de forma explícita ou implícita, dependendo do contexto e da necessidade do problema.

Considere duas retas distintas, $e$ e $g$, que são concorrentes em um ponto $O$, mas não perpendiculares entre si. Mantendo a reta $e$ fixa, fazemos a reta $g$ girar 360º em torno de $e$, preservando sempre o ângulo entre elas. Esse movimento gera uma superfície cônica circular

infinita, composta por duas partes separadas pelo vértice $O$. A reta $g$ recebe o nome de geratriz da superfície cônica, enquanto a reta $e$ é chamada de eixo (Figura 2).

Figura 2 – Superfície cônica dupla




Fonte: Winterle P., 2014.

Chama-se seção cônica, ou simplesmente cônica, o conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

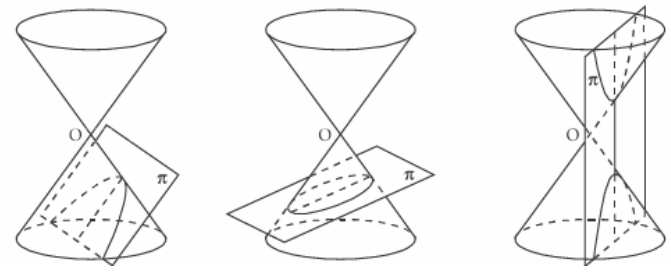
Quando um plano $\pi$ intercepta essa superfície sem passar pelo vértice $O$, a interseção resultante é uma seção cônica. O formato dessa cônica depende da inclinação do plano em relação à superfície (Figura 3).

(1) Se o plano for paralelo a uma geratriz, a curva obtida será uma parábola;

(2) Se o plano não for paralelo a nenhuma geratriz e cruzar apenas uma das partes da superfície, forma-se uma elipse (ou uma circunferência, caso o plano seja perpendicular ao eixo);

(3) Se o plano interceptar ambas as partes da superfície, o resultado será uma hipérbole, que se apresenta como dois ramos distintos.

Figura 3 – Seções cônicas

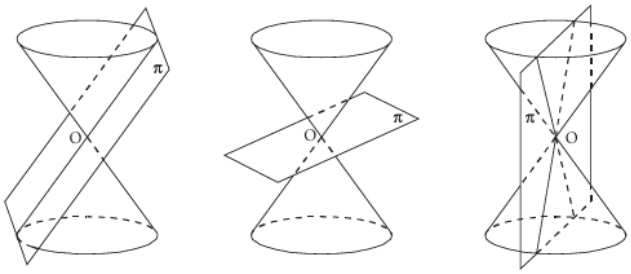



(1) (2) (3)

Fonte: Winterle P., 2014.

Dessa forma, as seções cônicas representam diferentes curvas obtidas a partir da interseção de um plano com uma superfície cônica dupla ilimitada (ou cone duplo), como ilustrado nas Figuras 3 e 4.

Figura 4 – Seções cônicas em cone duplo




(1) (2) (3)

Fonte: Winterle P., 2014.

Se cada um dos planos secantes representados na Figura 3 forem transladados paralelamente à sua posição original até chegarem ao vértice $O$, obteremos as respectivas cônicas “degeneradas” da Figura 4:

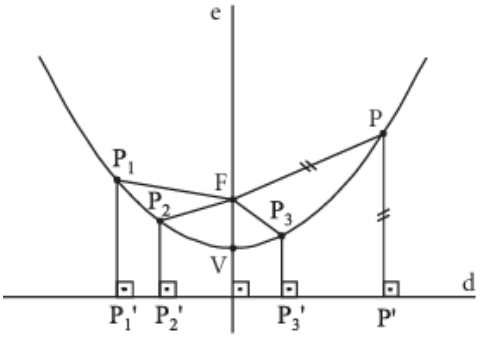
(1) uma reta;
(2) um ponto;
(3) duas retas concorrentes.

O surgimento e estudo dessas cônicas tiveram uma importância fundamental para o desenvolvimento de muitas áreas da Matemática, principalmente da Astronomia e Engenharia, sendo descritas na Antiguidade por Apolônio de Perga. Mais tarde, Kepler e Galileu mostraram que essas curvas ocorrem também em fenômenos naturais, como nas trajetórias de um projétil ou órbita de um planeta. É importante salientar que, cada cônica possui a sua propriedade de reflexão.

# 4 PARÁBOLA

A parábola é definida como o conjunto de todos os pontos de um plano que estão equidistantes de um ponto fixo, chamado foco, e de uma reta fixa, chamada diretriz. Considerando uma reta $d$ como diretriz e um ponto $F$ como foco não pertencente a $d$, é possível observar, como na Figura 5, cinco pontos que são equidistantes do ponto $F$ e da reta $d$, sendo eles $P_1,\ P_2, V, P_3$ e $P$. Dessa forma, um ponto $P$ qualquer é pertencente a parábola se, e somente se, $d(P,F) = d(P,d)$.

Figura 5 – Representação geométrica da parábola

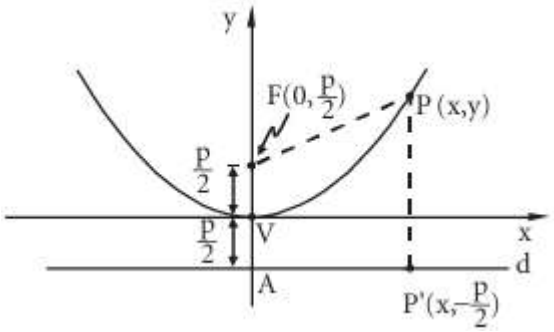



Fonte: Winterle P., 2014.

A partir dessa definição, é possível deduzir sua equação reduzida considerando diferentes posições do vértice. Tomando como base uma parábola com vértice na origem $V(0,0)$, dois casos principais se destacam:

(1) Quando o eixo da parábola coincide com o eixo $y$. (Figura 6)

Figura 6 – Representação com o eixo da parábola sendo o eixo $y$




Fonte: Winterle P., 2014.

Assuma que, o foco fica no ponto $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ e a diretriz é a reta $y = -\frac{p}{2}$. Por definição tem-se que um ponto $P(x,y)$ pertence à parábola se a distância dele ao foco for igual à sua distância à diretriz $d$. Essa condição é expressa da seguinte forma:

$$d(P,F) = d(P,d) \Rightarrow |\overline{FP}| = |\overline{PP'}| \qquad \text{(I)}$$

em que $P'$ é o ponto da diretriz que está na perpendicular que passa por $P$, de modo que $P'\left(x,-\frac{p}{2}\right)$.

Ao aplicar a fórmula da distância, na equação (I), é possível obter:

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y+\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$(x-0)^2 + \left(y-\frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(y+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 = 2py$$

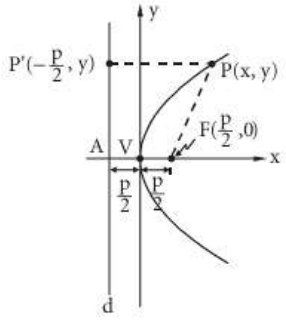
que é a equação reduzida da parábola com eixo de simetria no eixo $y$ e vértice na origem.

(2) Quando o eixo da parábola coincide com o eixo $x$.

Assumamos que o foco está no ponto $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, e a diretriz é a reta vertical $x = -\frac{p}{2}$, como mostra a Figura 7. Por definição, qualquer ponto $P(x,y)$ pertence à parábola se estiver à mesma distância do foco e da diretriz. Dessa forma, obtemos de forma análoga ao 1º caso a equação reduzida:

$$y^2 = 2px.$$

Figura 7 - Parábola com foco no eixo $x$ e diretriz vertical




Fonte: Winterle P., 2014.

Assumamos que o foco esteja no ponto $F(p,0)$ e que a diretriz seja a reta vertical $x=-p$. Por definição, um ponto $P(x,y)$ pertence à parábola se a sua distância ao foco for igual à sua distância à diretriz. Ou seja, temos a condição:

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = x-(-p) = x+p.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e simplificando a equação, obtemos:

$$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2,$$

$$x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2px+p^2,$$

$$y^2=4px.$$

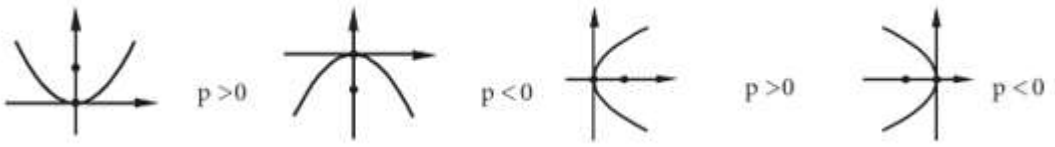
Dessa forma, quando o foco está em $F(p,0)$ e a diretriz em $x=-p$, a equação reduzida da parábola assume a forma

$$y^2=4px.$$

Vale destacar que a diferença entre escrever $y^2=2px$ ou $y^2=4px$ está apenas na forma como o parâmetro $p$ é definido, no primeiro caso, considerou-se o foco em $\left(\frac{p}{2},0\right)$, enquanto no segundo caso, considerou-se o foco em $(p,0)$.

No caso (1) citado, temos que se $p>0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e se $p<0$ sua concavidade será voltada para baixo. O parâmetro $p$ define a posição do foco e da diretriz em relação ao vértice e influencia diretamente na abertura da parábola. Já no caso (2), quando $p>0$ obtém-se uma parábola com concavidade voltada para a direita, e quando $p<0$ sua concavidade é voltada para a esquerda. A Figura 8 destaca como funciona a abertura e direcionamento da parábola de acordo com seus eixos e parâmetro.

Figura 8 – Direcionamento da parábola



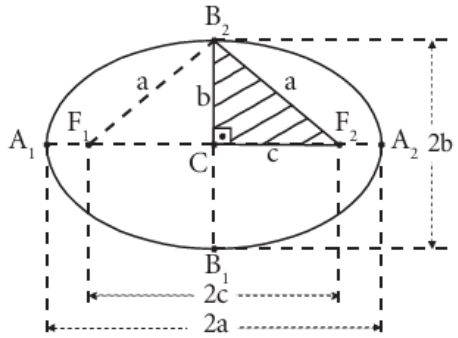

Fonte: Winterle P., 2014.

# 5 ELIPSE

A elipse pode ser definida como um conjunto de pontos localizados em um plano, nos quais a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse até dois pontos fixos, conhecidos como focos, permanece sempre a mesma. Os principais elementos que caracterizam uma elipse são:

- Focos: São os pontos $F_1$ e $F_2$ que são fundamentais na definição da elipse;
- Distância focal: Refere-se à distância $2c$ entre os dois focos $F_1$ e $F_2$;
- Centro: É o ponto médio $C$ do segmento que une os focos $F_1$ e $F_2$;
- Eixo maior: Representado pelo segmento $A_1A_2$, com comprimento $2a$, que passa pelos focos da elipse;
- Eixo menor: É o segmento $B_1B_2$, com comprimento $2b$, e é perpendicular ao eixo maior no ponto médio;
- Vértices: São os pontos $A_1, A_2, B_1, B_2$ que delimitam a elipse.

Figura 9 – Elementos da elipse



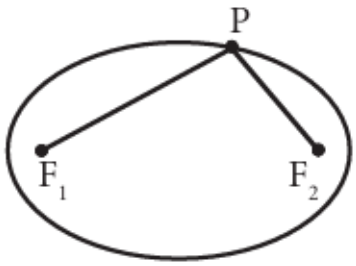

Fonte: Winterle P., 2014.

A partir da Figura 9, é possível deduzir que a relação $B_2F_2 = B_1F_1$ é válida, o que decorre do fato de que $B_2F_2 = B_1F_1 = a$. Considerando o triângulo retângulo $B_2CF_2$, temos a relação $b^2 + c^2 = a^2$. Observa-se também que os triângulos $B_2CA_1$ e $B_2CA_2$ compartilham o lado $B_2C$ e possuem os segmentos $CA_1$ e $CA_2$ congruentes por simetria. Além disso, os ângulos formados entre $B_2C$ e cada um desses lados são congruentes, o que permite aplicar o caso LAL (lado-ângulo-lado) de congruência entre triângulos. Dessa forma, concluímos que o $B_2CA_1 \equiv B_2CA_2$, o que implica que os ângulos nos vértices $B_2A_1C$ e $B_2A_2C$ são congruentes, e que os lados opostos a esses ângulos também possuem o mesmo comprimento.

Dessa forma, considerando um plano com dois pontos distintos, $F_1$ e $F_2$, tais que a distância entre esses pontos, $d(F_1, F_2) = 2c$, é um número real positivo com $2a > 2c$, pode-se

então definir a elipse de acordo com a constante $2a$. Um ponto $P$, como mostra a Figura 10, pertence à elipse se, e somente se, a soma das distâncias desse ponto até dois focos $F_1$ e $F_2$ for igual a $2a$, ou seja, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. Esse é o critério que caracteriza a elipse no plano.

Figura 10 – Elipse e seus focos




Fonte: Winterle P., 2014.

Para traçar uma elipse no papel, pode-se utilizar um método simples e eficiente. Inicialmente, dois pregos são fixados em pontos escolhidos previamente, denominados $F_1$ e $F_2$, conforme ilustrado na Figura 11.

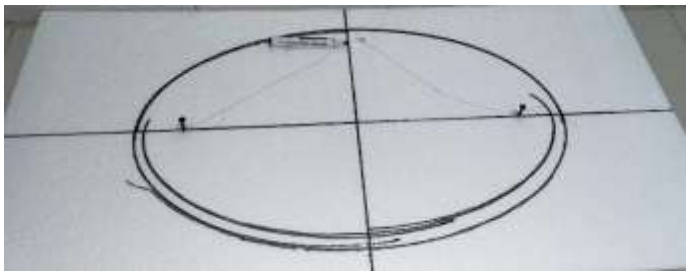
Figura 11 – Construção da elipse (Etapa 1)




Fonte: Imagem pessoal

Em seguida, um fio não elástico é preso a esses pregos, formando um laço solto. Ao posicionar um lápis de modo que ele mantenha o fio sempre esticado e, percorrendo a superfície, marca-se a curva da elipse, como mostra a Figura 12. É fundamental garantir que o fio permaneça sempre esticado durante o traçado, evitando folgas que possam comprometer a precisão do desenho. Além disso, é essencial manter o lápis em contato contínuo com o papel para assegurar que a forma resultante corresponda fielmente à de uma elipse.

Figura 12 - Construção da elipse (Etapa 2)

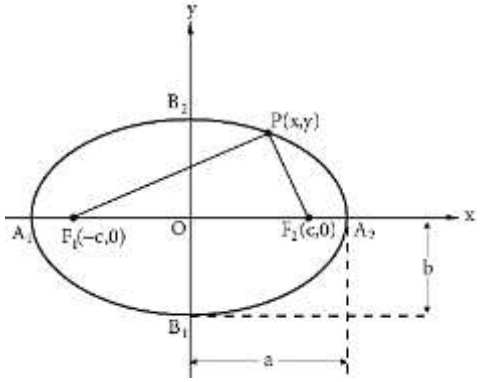


Fonte: Imagem pessoal

Esse processo evidencia a propriedade fundamental dessa curva: para qualquer ponto $P$ pertencente à elipse, a soma das distâncias até os focos $F_1$ e $F_2$ permanece constante e corresponde ao comprimento total do fio, valor que, na definição matemática, é representado por $2a$.

A partir dessa definição geométrica, é possível deduzir a forma algébrica da elipse, que permite trabalhar com suas propriedades de maneira mais precisa no plano cartesiano. Considerando uma elipse centrada na origem $(0,0)$, com o eixo maior sobre o eixo $x$, assumamos os focos localizados em $F_1(-c,0)$ e $F_2\ (c,0)$ como mostra a Figura 13.

Figura 13 – Elipse no plano cartesiano




Fonte: Winterle P., 2014.

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer sobre essa curva. Pela própria definição, tem-se:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a.$$

Escrevendo em termos de coordenadas obtém-se:

$$|(x+c, y-0)| + |(x-c, y-0)| = 2a.$$

As distâncias entre os pontos podem ser escritas usando a fórmula da distância euclidiana, dessa forma tem-se:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Isolando uma das raízes temos

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Com isso, é possível elevar ao quadrado ambos os membros para eliminar o primeiro radical:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=\left(2a-\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}\right)^2.$$

Após a eliminação da raiz no primeiro membro é possível fazer a expansão do segundo membro aplicando o quadrado da diferença de dois termos:

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2.$$

Subtraindo o $y^2, x^2, c^2$ e simplificando, temos

$$4a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=4a^2-4xc.$$

Dividindo por 4, obtém-se

$$a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=a^2-xc.$$

Elevando novamente ambos os membros ao quadrado, obtém se

$$\left(a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}\right)^2=(a^2-xc)^2$$

$$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2.$$

Simplificando e reorganizando para obter a forma canônica, temos

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Sabendo que $b^2 + c^2 = a^2$, temos por substituição:

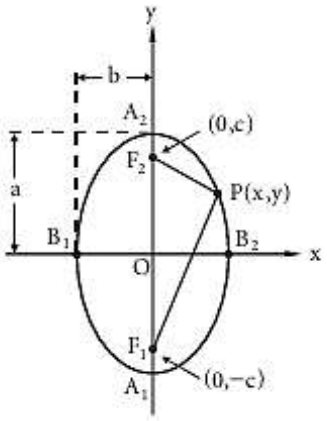
$$b^{2x^2} + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo os dois membros da equação por $a^2b^2$, obtém-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Também é possível determinar a equação reduzida quando o eixo maior estiver sobre o eixo $y$, como mostra a Figura 14.

Figura 14 – Elipse com eixo maior no eixo $y$




Fonte: Winterle P., 2014.

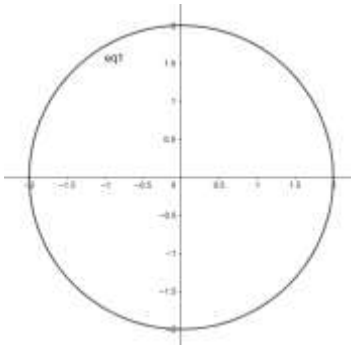
De maneira análoga, obtém-se:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

A partir da equação reduzida, é possível observar outra característica importante da elipse, a excentricidade, representada por $e$. A excentricidade da elipse é dada pela razão entre $c$ e $a$ da forma $e = \frac{c}{a}$ com $0 \leq e < 1$. Ou seja, é o valor da razão entre a distância do centro ao foco e o comprimento do semieixo maior. Essa razão indica o quanto a elipse está "alongada" ou "próxima de uma circunferência". Quanto menor o valor de $e$, mais arredondada é a elipse, sendo assim quanto mais próximo de 1, mais ela se afina ao longo do eixo maior.

É possível visualizar essa diferença na prática. As figuras abaixo geradas do GeoGebra destacam algumas elipses com valores de excentricidade diferentes.

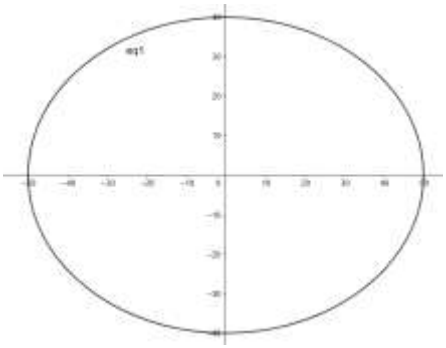
Figura 15 – Elipse com excentricidade zero




Fonte: Própria autora.

A elipse da Figura 15 possui $e = 0$ pois $c = 0$, adotando o formato de uma circunferência.

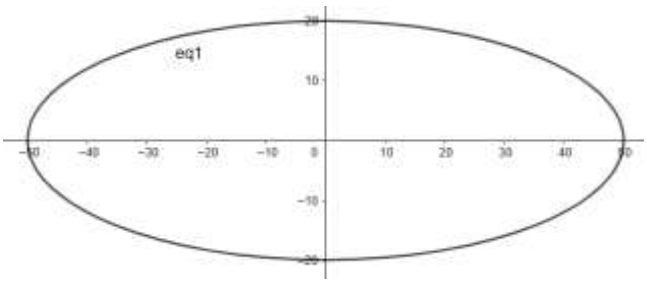
Figura 16 – Elipse com excentricidade = 0,6




Fonte: Própria autora.

A elipse da Figura 16 possui $e = 0{,}6$, sendo $c = 30$ e $a = 50$. Nota-se que, diferente da Figura 15, essa figura deixa de ter o formato de uma circunferência e apresenta um formato "oval".

Figura 17 - Elipse com excentricidade = 0,92




Fonte: Própria autora.

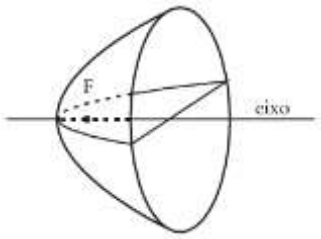
A elipse da Figura 17 possui $e = 0{,}92$, sendo $c \cong 46$ e $a = 50$. Nota-se que, diferente da Figura 16, essa figura se afina ainda mais ao longo do eixo maior por ter sua excentricidade próxima de $1$. As imagens obtidas têm como objetivo mostrar como essa razão afeta diretamente o formato da curva. Com isso, é possível comparar visualmente o comportamento da elipse conforme varia-se seus parâmetros.

# 6 PROPRIEDADES DE REFLEXÃO

No estudo da elipse e parábola, é interessante destacar uma de suas propriedades, que é a propriedade da reflexão associada a cada uma delas. Essa característica tem aplicações práticas em diversas áreas. A parábola, por exemplo, tem sua geometria na qual permite que raios paralelos ao eixo de simetria, ao incidirem sobre sua superfície curva sejam refletidos diretamente para o foco. E, é por conta dessa propriedade que se é utilizado o formato parabólico em antenas, refletores de faróis e até em fogões solares, no qual o aproveitamento da energia concentrada no foco é fundamental para o funcionamento dessas estruturas.

Na realidade, essas aplicações não envolvem apenas uma única parábola, mas sim um paraboloide**,** como mostra a Figura 18, que é uma superfície gerada pela rotação da parábola em torno de seu eixo.

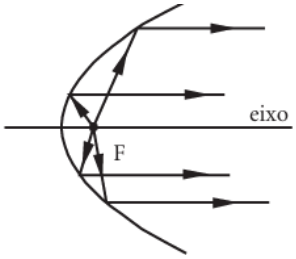
Figura 18 - Paraboloide




Fonte: Winterle P., 2014.

Todas as parábolas que compõem esse paraboloide compartilham um mesmo foco $F$. Quando a parte interna dessa superfície é refletora, como ocorre em faróis de automóveis, holofotes e outros dispositivos ópticos, qualquer raio emitido a partir do foco $F$ será refletido ao longo de trajetórias paralelas ao eixo da parábola, como mostra a Figura 19.

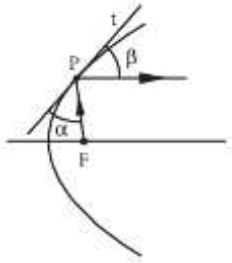
Figura 19 – Reflexão de raios em um refletor parabólico




Fonte: Winterle P., 2014.

Essa propriedade está fundamentada na lei da reflexão: quando uma reta tangente à parábola toca um ponto $P$, o ângulo de incidência $\alpha$ é sempre igual ao ângulo de reflexão $\beta$, representado na Figura 20.

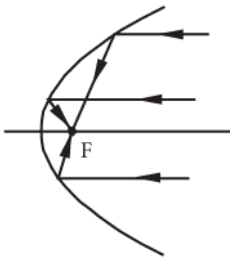
Figura 20 – Lei da reflexão na parábola




Fonte: Winterle P., 2014.

Esse princípio é explorado na construção de antenas parabólicas e telescópios, onde sinais muito fracos, como ondas de rádio ou raios de luz, precisam ser captados por uma superfície ampla e concentrados em um único ponto, o foco $F$, como mostra a Figura 21, para serem amplificados.

Figura 21 – Concentração de raios no foco de uma parábola



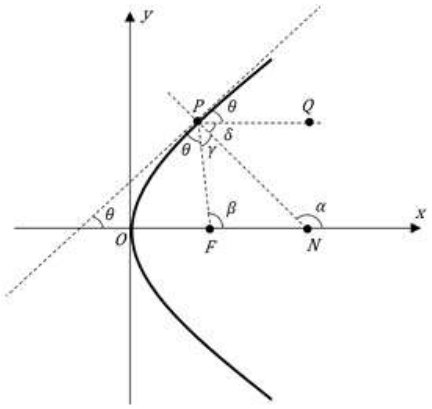

Fonte: Winterle P., 2014.

A parábola pode ser interpretada como um caso particular das cônicas, surgindo como o limite de uma elipse quando um de seus focos é deslocado para o infinito, mantendo o outro foco $F$ fixo. Como a elipse também possui uma propriedade refletora, na qual um raio emitido a partir de um foco é refletido na direção do outro, no caso limite da parábola essa propriedade se traduz em todo raio que parte do foco $F$ e atinge a curva é refletido paralelamente ao seu eixo. Essa característica explica a aplicação de superfícies parabólicas na construção de antenas, refletores de faróis e telescópios, permitindo concentrar ou direcionar energia com eficiência.

Para fundamentar a propriedade da parábola, considere a Figura 22. Seja $P$ um ponto da parábola, $PN$ a reta normal à curva nesse ponto e $\delta = \widehat{QPN}$, $\gamma = \widehat{NPF}$ os ângulos formados

com a normal. O ponto $Q$ é definido de modo que $PQ$ seja paralelo ao eixo $x$, representando assim a trajetória de um raio refletido após incidir na parábola. A propriedade refletora será verificada se mostrarmos que $\delta$ e $\gamma$ são congruentes, ou, que suas tangentes são iguais.

Figura 22 – Propriedade refletora da parábola




Fonte: Alves M., 2015.

Observa-se inicialmente que, sendo $m$ e $m'$ os declives da reta normal $\overleftrightarrow{PN}$ e da reta $\overleftrightarrow{FP}$, respectivamente, ou seja $m = \tan\alpha$ e $m' = \tan\beta$. Pela figura acima, temos:

$$\beta = 2\theta \Rightarrow \tan\beta = \tan(2\theta) \Rightarrow \tan\beta = m' = \frac{2\tan\theta}{1 - tan^2\theta}.$$

Da equação da parábola, assumindo $y^2 = 4px$, temos:

$$y = 2\sqrt{px} = 2\sqrt{p}\sqrt{x}\,.$$

Calculando a derivada obtém-se:

$$y' = 2\sqrt{p}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = \tan\theta \Rightarrow \tan\theta = y' = 2\sqrt{p}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = y' = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{x}} \Rightarrow \tan\theta = y' = \sqrt{\frac{p}{x}}\,.$$

Como $\overleftrightarrow{PN}$ é a reta normal à curva em $P$, tem-se:

$$m = -\frac{1}{y'} \Rightarrow m = -\sqrt{\frac{x}{p}}.$$

Por outro lado,

$$m' = \frac{2\tan\theta}{1 - tan^2\theta} \Rightarrow m' = \frac{2\sqrt{\frac{p}{x}}}{1 - \left(\sqrt{\frac{p}{x}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow m' = \frac{2\sqrt{\frac{p}{x}}}{1 - \frac{p}{x}} \Rightarrow m' = \frac{2\sqrt{\frac{p}{x}}}{\frac{x-p}{x}}$$

$$\Rightarrow m' = 2\sqrt{\frac{p}{x}} \cdot \frac{x}{x-p} \Rightarrow m' = \frac{2x\sqrt{p}}{(x-p)\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow m' = \frac{2\sqrt{xp}}{x-p} \Rightarrow m' = \frac{y}{x-p}.$$

Queremos provar que:

$$\tan\delta = \tan\gamma$$
$$\Rightarrow \tan(180° - \alpha) = \tan(\alpha - \beta).$$

Pela Figura 22, temos:

$$\delta = 180° - \alpha \text{ e } \gamma = \alpha - \beta.$$

Daí, nos resta provar que:

$$\tan(180° - \alpha) = \tan(\alpha - \beta).$$

Desenvolvendo ambos os membros:

$$\frac{\tan 180° - \tan\alpha}{1 + \tan 180° \cdot \tan\alpha} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\Rightarrow -\tan\alpha = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\Rightarrow m = \frac{m' - m}{1 + m'm} \Rightarrow m'(1 - m^2) - 2m = 0\,.$$

Realizando as substituições desses valores, temos:

$$\frac{y}{x-p} \cdot \left(1 - \frac{x}{p}\right) + 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x-p} \cdot \frac{p-x}{p} + 2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x-p} \cdot \frac{x-p}{-p} + 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{p}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{y}{p} + 2 \cdot \frac{\sqrt{xp}}{p} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{p}\left(y - 2\sqrt{xp}\right) = 0.$$

No entanto, essa última equação se anula, pela equação da parábola, pois $y = 2\sqrt{xp}$. Isso confirma que a identidade

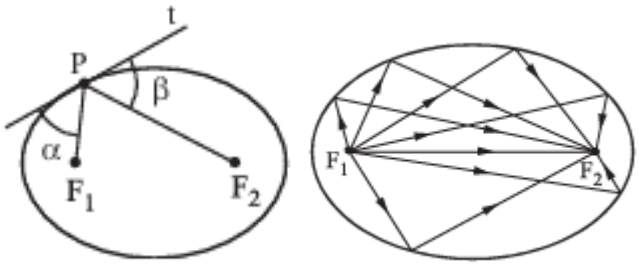
$$m'(1 - m^2) - 2m = 0$$

é satisfeita, o que comprova a condição necessária para que os ângulos $\delta$ e $\gamma$ sejam iguais. Portanto, conclui-se que um raio emitido a partir do foco $F$, ao incidir sobre a parábola em um ponto $P$, será refletido de forma que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, na qual valida a propriedade refletora da parábola.

Na elipse, a propriedade da reflexão funciona de maneira semelhante à da parábola. Se $t$ (Figura 23) representa a reta tangente a uma elipse no ponto $P$, então o ângulo formado entre $t$ e o segmento $PF_1$ é congruente ao ângulo formado entre $t$ e o segmento $PF_2$. Quando essa elipse é girada em torno de um de seus eixos, seja o maior ou menor, forma-se um sólido chamado elipsoide**.** Se a parte interna desse elipsoide for espelhada e uma fonte de luz for

posicionada em um dos focos, como em $F_1$, todos os raios emitidos refletirão em sua superfície e convergirão exatamente no outro foco, $F_2$. Esse mesmo princípio se aplica a ondas sonoras pois, se uma fonte de som estiver em $F_1$, as ondas refletirão nas paredes internas do elipsoide e se concentrarão em $F_2$, criando um efeito de amplificação nesse ponto.

Figura 23 – Propriedade refletora da elipse (Etapa 1)

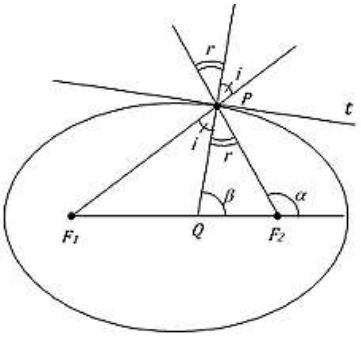



Fonte: Winterle P., 2014.

A fim de compreender analiticamente por que os raios que partem de um foco se refletem e convergem no outro, no parágrafo abaixo será realizada a demonstração da propriedade refletora da elipse. Para isso, é preciso utilizar a equação reduzida da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, com $a>b>0$ e focos localizados em $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$, onde $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da elipse, e $t$ a reta tangente à curva nesse ponto. Queremos provar que a reta normal à elipse em $P$, perpendicular à reta tangente $t$, é a bissetriz do ângulo formado pelos segmentos $F_1P$ e $PF_2$.

Figura 24 - Propriedade refletora da elipse (Etapa 2)




Fonte: Alves M., 2015.

Sejam $m$, $m_1$ e $m_2$ os coeficientes angulares das retas $QP$, $F_1P$ e $F_2P$, respectivamente, conforme indicado na Figura 24. Denotemos por $\alpha$ e $\beta$ os ângulos que as retas $F_2P$ e $QP$ fazem com o eixo $Ox$, de modo que:

$$\tan\ \alpha = m_2, \tan\beta = m.$$

Pela trigonometria, a tangente da diferença entre dois ângulos é dada por:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}.$$

Assim, considerando que o ângulo $r$ é dado por $r = \alpha - \beta$, temos:

$$\tan r = \frac{m_2 - m}{1 + m_2 m}.$$

Por outro lado, o ângulo $i$, é formado entre as retas $QP$ e $F_1P$ e possui tangente dada por:

$$\tan i = \frac{m - m_1}{1 + m m_1}$$

A propriedade refletora será verificada se esses dois ângulos forem iguais, ou seja, se $r = i$, o que implica em:

$$\frac{m_2 - m}{1 + m_2 m} = \frac{m - m_1}{1 + m m_1}.$$

Utilizando a propriedade fundamental das proporções e simplificando os termos, obtemos a seguinte equação:

$$(m_2 + m_1)(m^2 - 1) + 2(1 - m_1 m_2)m = 0. \qquad \text{(I)}$$

Agora, expressamos os coeficientes $m$, $m_1$ e $m_2$ em função de $x$, $y$ e $c$. Como $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, temos:

$$m_1 = \frac{y}{x+c}, m_2 = \frac{y}{x-c}, \text{ e } m = \frac{-b^2 x}{a^2 y}.$$

Dessa forma, deve-se verificar que esses valores de $m, m_2$ e $m_1$ satisfazem, realmente, à equação anterior (I). Para isso devemos realizar as substituições no primeiro membro da equação:

$$\frac{2xy}{x^2-c^2}\cdot\frac{b^4x^2-a^4y^2}{a^4y^2}+\frac{2b^2x}{a^2y}\cdot\frac{y^2-x^2+c^2}{x^2-c^2}=$$

$$\frac{2xy(b^4x^2-a^4y^2)+2a^2b^2xy(y^2-x^2+c^2)}{a^4y^2(x^2-c^2)}.$$

Sabendo que

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \text{ e } c^2=a^2-b^2,$$

o numerador, exceto pelo fator $2xy$, pode ser simplificado até que se obtenha

$$b^4x^2-a^4y^2+a^2b^2y^2-a^2b^2x^2+a^2b^2c^2$$

$$=b^4x^2-a^4y^2+b^2(a^2y^2-a^2x^2)+a^2b^2c^2$$

$$=a^2b^2(b^2-a^2+c^2)=0,$$

o que conclui a demonstração, já que $b^2-a^2+c^2=0$ pela definição de $c$.

Portanto, está demonstrado que a reta normal à elipse em qualquer ponto $P(x,y)$ é bissetriz do ângulo formado pelos segmentos que ligam esse ponto aos dois focos, provando assim, do ponto de vista analítico, a propriedade refletora da elipse.

# 7 APLICAÇÕES

As cônicas, em especial as parábolas e elipses, possuem diversas aplicações práticas nas quais estão associadas as suas propriedades refletoras. No caso das parábolas, sua principal característica é que, todo raio incidente paralelo ao eixo de simetria é refletido em direção ao foco. Essa propriedade é explorada em sistemas de captação e concentração de energia, como nos coletores e fornos solares, capazes de concentrar energia em um ponto focal.

As elipses distinguem-se pela propriedade na qual, qualquer raio emitido a partir de um de seus focos é refletido em direção ao outro foco. Essa característica é utilizada em refletores odontológicos que direcionam luz de forma eficiente ao campo de trabalho sem causar desconforto visual ao paciente. No campo recreativo, mesas de bilhar elípticas exploram a mesma propriedade. Dessa forma, as propriedades refletoras das cônicas não possuem apenas relevância teórica, mas também sustentam aplicações práticas e inovadoras em diversos contextos.

## 7.1 Fogão parabólico

O fogão solar parabólico representa uma aplicação prática da propriedade refletora da parábola, transformando a geometria em uma solução energética eficiente e sustentável. Esse tipo de equipamento utiliza refletores em formato parabólico, geralmente revestidos com espelhos ou papel alumínio, com o objetivo de concentrar os raios solares em um ponto específico, no qual é o foco. Nesse ponto é posicionada uma panela, cuja superfície escura facilita a absorção da radiação concentrada, resultando em altas temperaturas ideais para o cozimento de alimentos ou a desidratação de mantimentos. Segundo Sarmento (2015), os concentradores solares operam com base nesse princípio físico e, quando corretamente posicionados em relação ao sol, podem alcançar uma potência térmica considerável.

Além de sua eficiência térmica, o fogão parabólico é destacado por sua construção relativamente simples e de baixo custo, o que o torna uma alternativa viável, especialmente em regiões com escassez de recursos energéticos convencionais. De acordo com Miskalo (2010), fatores como o material refletor utilizado e o ajuste contínuo do equipamento em relação ao movimento aparente do sol são fundamentais para o bom funcionamento. Em condições ideais, como dias ensolarados e sem nuvens, esses dispositivos são capazes de atingir temperaturas superiores a 350°C, podendo, em casos específicos, ultrapassar até 500°C (DJALÓ, 2021). Essa

característica garante um desempenho comparável, ou até mesmo superior, ao de fogões a gás convencionais, com tempo de cozimento reduzido em relação a outros tipos de fogões solares, como o de caixa e painel.

De acordo com Macamo (2017), as principais características dos fogões parabólicos são:

- Temperatura de aquecimento: bem variável dependendo do tamanho da parábola refletora, podendo ultrapassar 500°C.
- Tempo de aquecimento: Rápido, quando comparado com outros fogões.
- Necessita de luz solar direta;
- Mecanismo de acompanhamento da trajetória do sol com reorientação a cada 30 minutos;
- Esfriamento rápido do alimento se há desvio de foco ou nebulosidade acentuada;
- Instável a ventos;
- Risco de fogo ou queimaduras;
- Danos aos usuários por raios refletidos e o fato de ficar exposto ao tempo.

No entanto, apesar dessas características, o uso dos fogões solares parabólicos também apresenta outros desafios. É necessário realizar ajustes frequentes, geralmente a cada 15 e 30 minutos, para que o foco da radiação permaneça sobre o recipiente de cozimento. Sendo assim, a principal vantagem do uso do fogão solar é a disponibilidade de energia gratuita e abundante, além da ausência de chamas, fumaça, perigo de explosão e incêndios.

Do ponto de vista histórico e social, a ideia dos fornos solares remonta ao século XVIII, com a experiência pioneira de Horace-Bénédict de Saussure, que obteve temperaturas próximas de 90°C com um dispositivo simples feito de madeira, lã e vidro. Hoje, iniciativas como a da organização internacional Solar Cookers International (SCI) mostram como essa tecnologia continua sendo relevante. Segundo dados da organização SCI, mais de 155 mil fogões solares já foram distribuídos globalmente, reduzindo a dependência de combustíveis fósseis e promovendo o acesso à energia limpa e gratuita. (SARMENTO, 2015). Assim, o fogão solar parabólico não apenas exemplifica a aplicação direta da Matemática no cotidiano, mas também revela seu papel estratégico na construção de soluções sustentáveis e socialmente inclusivas.

Dentro dessa perspectiva, o fogão solar parabólico surge como um recurso didático para exemplificar, de forma concreta, a aplicação das parábolas no cotidiano, a construção desse fogão busca tornar mais palpável o entendimento das propriedades refletoras da parábola. Com esse objetivo, foi desenvolvido um modelo funcional de fogão solar parabólico, utilizando

materiais acessíveis, de modo que os alunos pudessem visualizar, de forma direta, como os raios solares incidentes na superfície parabólica convergem para um único ponto.

Inicialmente foi utilizada uma antena parabólica, como base para o fogão. Também foi feito um apoio para que a antena pudesse ficar em pé como mostra a Figura 25.

Figura 25 – Construção do fogão solar parabólico (Etapa 1)



Fonte: Imagem pessoal

Após o encaixe do apoio na antena, foi realizada a pintura com tinta spray metálica. Logo em seguida utilizou-se de papel insulfilm para a parte refletora da antena. Esse papel foi colocado como forma de adesivo e é ideal para o fogão solar pois tem a sua superfície espelhada (Figura 26).

Figura 26 - Construção do fogão solar parabólico (Etapa 2)



Fonte: Imagem pessoal

Com o fogão solar parabólico pronto, foram iniciados os testes de localização do foco, e testagem de temperatura. Foi possível observar que em um dia de sol às 12h, a temperatura no foco chega a mais de 200°C em poucos minutos. Foram também realizados testes com objetos e alimentos, e seus resultados estão descritos abaixo:

1º teste - Realizado no dia 09/07/2025 às 12:02

O primeiro teste realizado teve como objetivo verificar a temperatura atingida na parábola. Utilizando um termômetro com fio, observou-se que a temperatura ambiente era de 29°C. Ao posicionar o sensor no ponto focal, a temperatura elevou-se rapidamente, ultrapassando 100 °C em poucos minutos. No momento do registro fotográfico, o tempo estava levemente nublado, o que provocou a redução da temperatura para 85,1 °C. (Figura 27)

Figura 27 – 1º teste no fogão solar parabólico



Fonte: Imagem pessoal

2º teste - Realizado no dia 19/07/2025 às 08:42

O segundo teste teve como objetivo verificar se o período da manhã também seria favorável para a obtenção de altas temperaturas. Para isso, utilizou-se um pedaço de papel higiênico, posicionado no foco da parábola. Com os raios solares concentrados no foco, o papel entrou em combustão, conforme ilustrado na Figura 28.

Figura 28 – 2º teste no fogão solar parabólico



Fonte: Imagem pessoal

3º teste - Realizado no dia 27/07/2025 às 10:55

O terceiro teste teve como objetivo verificar a possibilidade de cozinhar alimentos, utilizando como exemplo fritar um ovo. Durante o experimento, a temperatura ambiente era de 31 °C, enquanto a temperatura no foco da parábola atingiu 80 °C e, no recipiente, chegou a 70 °C. Inicialmente, colocou-se manteiga no recipiente para derreter e, em seguida, foi adicionado o ovo (Figura 29). Após oito minutos, observou-se que a clara já apresentava ponto de cozimento, porém a gema permanecia crua. Devido ao tempo nublado, não foi possível concluir o teste e verificar o ovo completamente frito.

Figura 29 – 3º teste no fogão solar parabólico



Fonte: Imagem pessoal

4º teste - Realizado no dia 13/08/2025 às 12:30

O quarto teste foi realizado utilizando uma garrafa plástica vazia e um pedaço de papel cartão por apresentar maior resistência. A temperatura ambiente era de 31 °C e, no foco da parábola, foi registrado 135,6 °C. Devido à presença de algumas nuvens, a garrafa plástica levou cerca de seis minutos para apresentar sinais de queima em sua superfície externa. Já o papel cartão entrou em combustão em menos de um minuto no ponto onde o foco estava direcionado (Figura 30).

Figura 30 – 4º teste no fogão solar parabólico



Fonte: Imagem pessoal

## 7.2 Mesa Elíptica

O bilhar é um jogo jogado em uma mesa específica, onde se usam tacos para impulsionar bolas e acertar na caçapa, já no caso do bilhar matemático, o que o torna diferente é o formato da mesa, que é baseado no traçado de uma curva. Isso faz com que o jogo aconteça com apenas uma bola e visando um único alvo. Do ponto de vista matemático, essa bola pode ser vista como um ponto que se move em linha reta e, ao tocar nas bordas da mesa, reflete-se seguindo a regra de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Essa propriedade refletora abre espaço para aplicações educacionais, já que recursos manipuláveis ajudam muito na aprendizagem de conceitos matemáticos, pois tornam ideias abstratas mais fáceis de entender. No entanto, só usar esses materiais não garante um bom aprendizado.

> Conforme Haetinger (2004, *apud* SILVA; SILVA, 2021, p. 6), as atividades lúdicas são as que promovem a imaginação e transformam o sujeito em relação ao seu objeto de aprendizagem, permitindo a interação do aluno com o objeto do ensino, enfatizando a necessidade do planejamento das ações para alcançar as metas educativas e os objetivos propostos. Os alunos precisam ser estimulados quanto a atividades em sala de aula, o que influi diretamente nos resultados. (Silva e Silva, 2021, p. 6)

É essencial que o professor tenha um planejamento bem estruturado para aproveitar o potencial desses recursos. Dentro desse contexto, o bilhar em forma de elipse pode ser uma ótima ferramenta, pois permite discussões interessantes e torna o ensino mais dinâmico e envolvente, principalmente para o estudo da Geometria Analítica.

Para tornar o estudo da Geometria Analítica mais acessível e didático, especialmente no que se refere às cônicas, com foco na elipse, foi desenvolvida uma mesa de bilhar elíptica como recurso lúdico para auxiliar os alunos na compreensão das propriedades dessa figura geométrica. A ideia central é demonstrar, de forma prática, o conceito de distância focal e demais características da elipse. Inicialmente, foi elaborado um protótipo em isopor (Figura 31), servindo como modelo para a versão final em madeira.

Figura 31 – Construção do protótipo da mesa elíptica



Fonte: Imagem pessoal

A construção da mesa em madeira foi feita na serraria do Taitinga, Luciano do Bilhar. Inicialmente foi necessário um molde impresso no formato da elipse (Figura 32) com eixos de 100cm e 80cm. No molde foram calculados as posições dos focos. Para a base foi utilizada uma folha de MDF.

Figura 32 - Construção da mesa elíptica (Etapa 1)



Fonte: Imagem pessoal

Após decalcar o molde para garantir maior precisão no formato da elipse, o MDF foi cortado e, em seguida, posicionado sobre a base que serão localizados os focos que servirão para a caçapa e ponto de lançamento (Figura 33).

Figura 33 - Construção da mesa elíptica (Etapa 2)



Fonte: Imagem pessoal

Após essa etapa, a mesa foi forrada com o pano verde de sinuca, e foi adicionada a ela uma borracha específica em construções de mesa de bilhar, para que a bola consiga bater na borda e retornar, como mostra a Figura 34. Os pontos correspondentes aos focos serão marcados e, após os testes, ela será levada para a sala de aula.

Figura 34 - Construção da mesa elíptica (Etapa 3)



Fonte: Imagem pessoal

Dessa forma, os alunos que estudaram o conteúdo poderão compreender melhor o funcionamento da elipse. Para facilitar essa compreensão, pode ser utilizado o software GeoGebra para representar a mesa com suas dimensões e explorar a relação entre os focos, eixo maior, eixo menor e a distância focal.

# 8 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática é uma ferramenta pedagógica bem estruturada, que organiza as atividades de ensino em etapas progressivas e coerentes com os objetivos de aprendizagem. Ela permite que o professor conduza o processo educativo de forma planejada, partindo de um diagnóstico prévio dos saberes dos alunos e avançando de forma mais complexa conforme o progresso da turma. Esse tipo de organização favorece não apenas o domínio dos conteúdos escolares, mas também na construção de um raciocínio lógico e reflexivo, ao conectar diferentes saberes de maneira significativa.

De acordo com Zabala (1998), sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”.

Ao aplicar uma sequência didática, é essencial criar situações que estimulem a participação ativa dos alunos, com propostas que desafiem, provoquem investigação e estimulem a autonomia. O uso de jogos, atividades práticas, resolução de problemas e discussões coletivas fortalece o aprendizado ao permitir a experimentação e o desenvolvimento de estratégias próprias. Essa abordagem vai além da simples transmissão de conteúdo, pois valoriza a interação entre os alunos e o conhecimento, criando condições para a formação de competências e habilidades cognitivas mais profundas.

Zabala (1998) defende que a utilização da sequência didática promove a interdisciplinaridade e é um dos caminhos mais acertados para melhorar a prática educativa. Ao articular diferentes áreas do saber em torno de um mesmo tema, é possível favorecer uma visão mais ampla e contextualizada do conteúdo estudado. Isso torna o processo de ensino mais dinâmico e significativo, ao mesmo tempo em que prepara os alunos para interpretar e agir no mundo com senso crítico e responsabilidade. Assim, a sequência didática se mostra um recurso indispensável para a prática pedagógica reflexiva e transformadora.

No caso do estudo das cônicas, por exemplo, é possível elaborar uma sequência didática que envolva não apenas a teoria das curvas, mas também sua representação geométrica, suas propriedades analíticas e, principalmente, suas aplicações no mundo real.

Ao expor uma mesa em forma de elipse na sala de aula, o professor pode explorar as propriedades refletoras dessa curva e sua simetria, incentivando os alunos a compreenderem a equação reduzida da elipse e sua relação com os eixos e focos. Da mesma forma, o projeto de um fogão solar parabólico permite integrar conteúdos de Geometria Analítica, Física e

sustentabilidade, uma vez que a parábola, por sua propriedade refletora, concentra os raios solares em um foco, otimizando a captação de energia térmica. Essas atividades contribuem para que os estudantes percebam a Matemática como ferramenta útil na resolução de problemas concretos, ampliando o sentido e a motivação pela aprendizagem.

Segundo Delizoicov e Angotti (2009), o ensino pautado em situações concretas e socialmente relevantes estimula a problematização, a investigação e o diálogo entre saberes, promovendo uma aprendizagem mais crítica e contextualizada. Já Perrenoud (1998) destaca que, ao longo de uma sequência didática bem planejada, a avaliação deixa de ser um fim e passa a ser um instrumento permanente de regulação da prática pedagógica, permitindo ao professor ajustar o percurso conforme as respostas dos alunos.

Nesse sentido, a abordagem com cônicas aplicada a objetos concretos, como o fogão parabólico e a mesa elíptica, potencializa o desenvolvimento de competências matemáticas e científicas, favorecendo a autonomia dos alunos e fortalecendo seu papel como agentes ativos no processo de aprendizagem. Sendo assim, o planejamento de atividades articuladas com a realidade do aluno promove não apenas a compreensão dos conteúdos escolares, mas também a formação de sujeitos críticos, criativos e socialmente engajados.

## 8.1 Fogão parabólico

Buscando despertar o interesse dos alunos e conectar a Matemática ao cotidiano, elaborou-se uma sequência didática centrada no funcionamento de um fogão solar parabólico, cuja estrutura permite visualizar, de forma prática, a propriedade refletora da parábola e suas aplicações. Essa sequência pode ser aplicada em turmas do ensino médio.

**Unidade temática**

Geometria Analítica

**Objeto de Conhecimento**

Equações cônicas, com ênfase na parábola, propriedades geométricas e aplicações no cotidiano.

**Competência Específica**

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões,

experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC)

**Habilidade**

Compreender e aplicar as propriedades geométricas da parábola, por meio de sua representação algébrica e geométrica, analisando sua utilização em diferentes contextos, como o funcionamento de um fogão solar parabólico.

**Percurso Didático**

**1. Apresentação do conteúdo**

O professor inicia em sala de aula com uma breve apresentação teórica sobre a parábola, utilizando imagens e gráficos que destacam sua forma, também destacando a propriedade refletora. Em seguida, levanta uma questão problema de modo investigativo ao aluno, como: “Você sabia que uma simples curva pode concentrar luz e gerar calor ao ponto de queimar objetos de baixa fusão ou até mesmo cozinhar alimentos?”

A partir disso, exibe um vídeo curto ou imagens de fogões solares parabólicos em funcionamento, destacando sua propriedade refletora.

**2. Exploração teórica**

Com o apoio do GeoGebra, o professor pode explorar a equação da parábola, localizando o foco, vértice e diretriz, e discute como esses elementos se conectam com a estrutura do fogão solar. O professor também apresenta aplicações de modelos parabólicos, como faróis de carro.

**3. Atividade experimental**

O professor leva os alunos a um espaço aberto em dia de sol, para que possam participar de uma demonstração prática com o modelo de fogão parabólico. É necessário observar a estrutura do objeto e em seguida relembrar os elementos abordados na aula.

Durante a atividade, os alunos serão convidados a testar o funcionamento do fogão parabólico. Com a orientação do professor, e todos os cuidados necessários, como a utilização de óculos escuros, o objeto será posicionado diretamente sob a luz solar. O desafio será identificar o ponto focal da parábola, observando onde os raios solares se concentram com maior intensidade.

Uma vez localizado o foco, os alunos poderão posicionar pequenos objetos nesse ponto, como pedaços de papel e gravetos, para verificar se ocorre o aquecimento, ou até mesmo combustão, evidenciando a concentração de energia. Logo depois, o professor pode propor que os alunos tentem cozinhar/fritar algum alimento, como um ovo.

**4. Sistematização do conhecimento**

De volta à sala de aula, os alunos discutem os resultados obtidos a partir da experiência. É retomada a definição formal da parábola, e os estudantes são incentivados a relacionar teoria e prática.

## 8.2 Mesa elíptica

Com o objetivo de contextualizar o estudo da elipse de forma significativa, a proposta dessa sequência didática parte da observação e experimentação com uma mesa de bilhar elíptica, permitindo que os estudantes descubram, por meio da experimentação e observação, as propriedades refletoras da elipse. Essa proposta pode ser aplicada para turmas do ensino médio.

**Unidade Temática**

Geometria Analítica.

**Objeto de Conhecimento**

Equações cônicas, com ênfase na elipse, propriedades geométricas e aplicações no cotidiano.

**Competência Específica**

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC)

**Habilidade**

Identificar e aplicar propriedades geométricas da elipse em situações do cotidiano. Utilizar recursos tecnológicos, como softwares de Geometria, para explorar trajetórias e propriedades de figuras cônicas.

## Percurso Didático

### 1. Comunicação da Lição: Atividade inicial com a mesa de bilhar elíptica

O professor inicia a aula propondo um desafio prático: acertar a bola branca na mesa de bilhar elíptica sem mirar diretamente nela, mas fazendo com que a bola de lançamento bata na borda e depois acerte a outra.

Com essa situação, os alunos podem despertar a curiosidade em tentar saber se há algum truque na mesa. Durante esse momento o professor pode ir lançando outros desafios e perguntas para que os alunos reflitam como: “Existe uma posição inicial da bola de lançamento em que ela, ao bater na borda, acerte sempre a bola branca, independente do ângulo?”.

### 2. Apresentação da Elipse: Definição e elementos

O professor apresenta a definição matemática da elipse como o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a dois focos é sempre constante. São abordados os principais elementos da elipse: focos, eixo maior, eixo menor, centro, vértices e excentricidade. Além disso, é apresentada a equação reduzida da elipse e como ela se comporta no GeoGebra com diferentes excentricidades.

Após a apresentação, o professor, então, mostra que a bola branca que deveria ser acertada está posicionada em um dos focos da elipse, e que, independente do ponto de colisão com a borda ou posicionamento entre os focos, a bola de lançamento sempre acertará a bola branca.

### 3. Exploração da propriedade refletora da elipse

A partir da experiência anterior, o professor introduz a propriedade refletora da elipse: qualquer raio emitido de um foco e refletido pela borda incide no outro foco. É possível ilustrar essa propriedade com simulações no GeoGebra.

### 4. Aplicações

O professor pode ampliar a discussão e apresentar outras aplicações da elipse, como:

- Órbitas planetárias;
- Refletores;
- Salas elípticas (Galeria dos Sussurros).

**5. Exercitação**

- Registrar as observações e conclusões feitas durante a apresentação;
- Entender como a propriedade refletora funciona;
- Aplicar a fórmula reduzida no GeoGebra;
- Entender a excentricidade com os exemplos no GeoGebra.

# 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desse trabalho foi de grande importância para minha formação, pois me proporcionou a oportunidade de aprofundar meus conhecimentos na área da Geometria Analítica e, de forma mais aprofundada, no estudo das cônicas, focando na elipse e parábola, um tema que, apesar de presente no currículo da graduação, muitas vezes não é explorado com a profundidade necessária para que se percebam suas inúmeras aplicações práticas. Ao pesquisar sobre a elipse e a parábola, pude compreender melhor sua relevância histórica, desde a evolução da Matemática até a aplicação de suas propriedades refletoras em contextos reais.

Durante a pesquisa, percebi que muitos graduandos, assim como eu, não têm contato com experiências práticas que evidenciem a aplicação das cônicas no cotidiano. Essa lacuna dificulta o reconhecimento da importância do tema e sua conexão com outras áreas do conhecimento. Por se tratar de um curso de licenciatura, é importante que o futuro professor desenvolva estratégias que aproximem o conteúdo da realidade dos alunos, de modo que estes possam visualizar e compreender a Matemática de forma concreta e significativa.

Nesse sentido, a elaboração da sequência didática e a construção dos projetos, como a mesa elíptica e a antena parabólica solar, foram etapas essenciais para unir teoria e prática. Esses experimentos não apenas demonstraram as propriedades refletoras estudadas, mas também se mostraram recursos pedagógicos viáveis para uso em sala de aula, despertando a curiosidade, criatividade e o raciocínio investigativo dos estudantes.

# REFERÊNCIAS


ALMEIDA, Célio Pinto de. *Cônicas*. Rio de Janeiro: G. Ermakoff, 2019.

ALVES, Moacir. *Seções cônicas:* propostas de atividades com ênfase nas propriedades refletoras e aplicações. Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

CIDESP. *O que significa logos? Entenda seu profundo significado*. 2025. Disponível em: https://cidesp.com.br/artigo/o-que-significa-logos/. Acesso em 14 de ago. de 2025.

DELIZOICOV, Demétrio; ANGOTTI, José André; PERNAMBUCO, Marta Maria. *Ensino de Ciências:* fundamentos e métodos. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

DJALÓ, Adulai Gibril. *Construção de fogão solar parabólico de baixo custo*. Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB, Instituto de Engenharias e Desenvolvimento Sustentável, Redenção, 2021.

EDUARDO. *Matemática mesopotâmica: como surgiram os primeiros sistemas numéricos?* Buzzquo, 2024. Disponível em: https://buzzquo.com/218/matematica-mesopotamica-como-surgiram-os-primeiros-sistemas-numericos/. Acesso em 14 de ago. de 2025.

EVANGELISTA, Adriane Lima. *Estudo das cônicas: uma perspectiva na forma implícita.* 2023. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Goiânia, 2023.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GOMES, Sinesior. *Pré-história (6.000.000 – 3.500 a.C.).* 2018. Disponível em: https://sinesiorgomes.blogspot.com/2017/08/pre-historia-6000000-3500-ac.html. Acesso em 14 de ago. de 2025.

IMPA. *Al-Khwarizmi: o homem que simplificou a multiplicação.* 2020. Disponível em: https://impa.br/noticias/al-khwarizmi-o-homem-que-simplificou-a-multiplicacao/. Acesso em 14 de ago. de 2025.

MACAMO, Cesárdio Noé. *Estudo da viabilidade do uso do fogão solar tipo parabólico*. Escola Superior de Ciências Marinhas e Costeiras, Quelimane, 2017.

MEHL, Ewaldo L. M. *O mundo e os seres humanos: uma breve história do Homo sapiens*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Elétrica, 2022.

MILANI, Wilton Natal. *A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio.* Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2011.

MISKALO, Pedro. *Fogão solar: uma riqueza dos pobres.* Eco Debates, 2010. Disponível em: https://www.ecodebate.com.br/2010/04/29/fogao-solar-uma-riqueza-dos-pobres-por-pedro-miskalo/. Acesso em 14 de ago. de 2025.

MONTOITO, Rafael; GARNICA, Antonio. *Ecos de Euclides: breves notas sobre a influência d'Os Elementos a partir de algumas escolas filosóficas*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 16, n. 1, pp.95-123, 2014.

NEIVA, Marcelo Borges. *O teorema de Pitágoras e suas extensões.* Universidade Federal de Catalão, Instituto de Matemática e Tecnologia, Catalão, 2023.

NHACUDIMA, José Mário. *Concepção e construção de um fogão solar do tipo parabólico para cozimento dos alimentos*. Escola Superior de Ciências Marinhas e Costeira, Quelimane, 2017.

OBMEP. *Números especiais: números perfeitos.* 2016. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-numeros-perfeitos/. Acesso em 14 de ago. de 2025.

PERRENOUD, Phillipe. *Avaliação:* da excelência à regularização das aprendizagens entre duas lógicas. Porto Alegre, Artmed, 1998.

SARMENTO, José Souto. *Construção e análise de um forno solar como uma atividade prática não formal no ensino de física*. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2015.

SEMANÁRIO DO PENSAMENTO. *Os 7 sábios da Grécia.* 2020. Disponível em: https://semanariodopensamento.blogspot.com/2020/12/os-7-sabios-da-grecia.html. Acesso em 14 de ago. de 2025.

SILVA, Jéssica Larissa da; SILVA, Silvania Maria da. *A importância de atividades lúdicas no processo da aprendizagem em sala de aula*. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Unidade Acadêmica de Educação a Distância e Tecnologia, Recife, 2021.

VELOSO, Eduardo. *O triunfo da álgebra. Educação e Matemática*, Lisboa: Associação de Professores de Matemática, n. 85, p. 61, 2005. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1439/1478. Acesso em 14 de ago. de 2025.

WINTERLE, Paulo. *Vetores e Geometria Analítica.* 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

ZABALA, Antoni. *A prática educativa:* como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

**Noelí de Jesus Carvalho**

# A Matemática das Cônicas: aplicações das formas elíptica e parabólica

**Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.**

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 28/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

_____
Prof. Me. Roque da Silva Lyrio (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

_____
Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

_____
Profa. Esp. Ruth da Silva Araújo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 22 de agosto de 2025.

Documento assinado eletronicamente por **ROQUE DA SILVA LYRIO**, **Professor Efetivo**, em 02/09/2025, às 17:42, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **Diogo Soares Dorea da Silva**, **Professor Efetivo**, em 03/09/2025, às 10:31, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **RUTH DA SILVA ARAUJO**, **Professor Efetivo**, em 03/09/2025, às 12:19, conforme decreto nº 8.539/2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site http://sei.ifba.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&acao_origem=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **4364154** e o código CRC **66ED84F0**.