

Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia da Bahia - Campus Valença
Licenciatura em Matemática

Jackson Silva dos Santos

Um estudo sobre o Teorema dos Quatro Vértices

Valença-BA
2026

Jackson Silva dos Santos

Um estudo sobre o Teorema dos Quatro Vértices

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - *Campus* Valença como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Soares D. da Silva

Valença-BA
2026

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DO IFBA, COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

S237e Santos, Jackson Silva dos

Um estudo sobre o teorema dos quatro vértices: / Jackson Silva dos Santos; orientador Diogo Soares Dórea da Silva -- Valença : IFBA, 2026.

70f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal da Bahia, 2026.

1. Geometria Diferencial. 2. Curvas Planas. 3. Teorema dos Quatro Vértices.. I. Silva, Diogo Soares Dórea da, orient. II. TÍTULO.

CDD:516.36

"Eu sou a continuação de um sonho."

BK', 2022.

À minha avó Joana Maria (in memoriam),
minha referência incontestável de amor,
cuja memória permanece viva em cada
momento desta jornada. Sigo com a certeza
de que, de alguma forma, você continua
caminhando ao meu lado, presente em cada
conquista e em cada passo deste caminho.

Agradecimentos

Há um trecho da música *Pessoas*, de BK', que diz: "Tenho o melhor irmão do mundo / E temos a melhor mãe do mundo / E os melhores amigos do mundo / Diz pra mim que isso não é dominar o mundo". É através desses versos que inicio meus agradecimentos, pois a conclusão desta etapa não é uma conquista solitária. Se cheguei até aqui, foi porque tive pessoas que caminharam comigo, me sustentaram nos momentos difíceis e celebraram cada conquista ao meu lado. E isso, para mim, é dominar o mundo.

A Deus, por ter me guiado até aqui, amparando-me nos dias difíceis e ensinando-me a transformar as dificuldades em força para seguir em frente.

À minha família, meu primeiro e maior alicerce.

À minha mãe, Cristiana da Silva, por me mostrar todos os dias, o verdadeiro significado do amor e do cuidado. Obrigado por ser meu porto seguro, por sempre me incentivar e por me mostrar que os estudos eram o melhor caminho. Suas orações são o meu escudo.

Ao meu pai, Josenilton Felicíssimo dos Santos, por todo o esforço, pela educação, pelo apoio e por nunca medir esforços para me ajudar a alcançar meus sonhos.

À minha avó, Estelita Isidoria, que sempre acreditou no quão longe eu poderia chegar. Obrigado pelos ensinamentos e pelo apoio fundamentais para a formação dos meus valores.

Aos meus irmãos, Jefferson Nilton, Isabele Correia, Gabriel Correia, Gustavo Nery e Gabriela Lima, por todo o apoio, carinho e companheirismo. Em especial, ao meu irmão Jefferson, que me inspira com sua determinação e foco em seus objetivos. Com ele aprendi a admirar os estudos e a ter constância para realizar os meus sonhos.

Aos meus primos, Eric da Silva e Tanara dos Santos, por todo o apoio ao longo deste processo e por estarem sempre ao meu lado, oferecendo força e confiança nos momentos mais desafiadores.

Ao meu orientador, amigo e uma das minhas maiores referências, Diogo Dórea, por ter me proporcionado a oportunidade de estudar e pesquisar, contribuindo de forma essencial para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço pela orientação, pelo apoio,

pela escuta e pelas resenhas.

Aos membros da minha banca, Edvan Trindade e Marcelo Lino, pela disponibilidade, pelas valiosas contribuições e por enriquecerem este trabalho com seus conhecimentos. A todos os professores que contribuíram para a minha formação acadêmica e pessoal ao longo desta trajetória. Ao Instituto Federal da Bahia - Campus Valença, por ter sido minha segunda casa durante todos esses anos de formação.

Aos meus amigos de infância, Flávia Couceiros e Hyngred Menezes, que permanecem presentes mesmo com as mudanças e os caminhos que a vida nos apresenta. Sou muito grato por ter vocês na minha vida.

Aos meus amigos da faculdade, Noelí Carvalho, Germano Ramos, Bruna Lisbôa, Iasmin Fonseca, Carolaine Morais, Karoline Santos, Geisivan Rocha, Maria Elysa, Emilly Fonseca, Carlos Henrique, Anderson Guilherme, Joseane Gomes, Júnior Gonçalves, Dannilo Vieira e Gleiciene Conceição. Obrigado pela amizade, pelas conversas, pelos momentos de descontração e pelo apoio nos dias mais difíceis. Levarei comigo não apenas as lembranças construídas ao longo da graduação, mas também a certeza de que conquistei amizades que desejo preservar para toda a vida.

À corrida, por me ensinar que independentemente dos desafios e do medo, eu sou capaz de continuar.

Por fim, dedico um agradecimento especial à minha avó, Joana Maria (in memoriam), meu alicerce durante toda a minha vida, que partiu antes de presenciar a concretização deste sonho. Embora a saudade de sua partida seja imensa, o legado que deixou permanece vivo em mim. Você foi meu apoio, meu braço direito, meu porto seguro e uma das pessoas que mais acreditaram em mim durante toda essa caminhada. Esta conquista simboliza a realização de um sonho que também foi seu. Por isso, esta vitória não é apenas minha: ela é nossa.

A todos vocês, o meu mais sincero obrigado. Este trabalho carrega o meu nome, mas também carrega um pouco de cada pessoa que caminhou comigo até aqui.

Resumo

A Geometria Diferencial é uma área de estudo de grande relevância na Matemática, tendo como um de seus resultados importantes o Teorema dos Quatro Vértices. O objetivo deste trabalho é apresentar e demonstrar esse teorema. Para isso, será abordado de forma objetiva e introdutória o estudo da Geometria Diferencial, em específico das curvas planas. Para a compreensão dos conceitos apresentados, são necessários conhecimentos de Cálculo Diferencial e Geometria Analítica. Ao longo desta pesquisa, serão apresentadas definições e propriedades relacionadas às curvas planas, ao vetor tangente, ao comprimento de arco, à reparametrização e à curvatura, para a compreensão da demonstração do teorema. Por fim, será apresentado um exemplo de uma curva que satisfaz as hipóteses do teorema e três contraexemplos nos quais algumas dessas hipóteses não são satisfeitas.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Curvas Planas; Teorema dos Quatro Vértices.

Abstract

Differential Geometry is a highly relevant area of study in Mathematics, with the Four Vertex Theorem being one of its important results. The aim of this work is to present and prove this theorem. To this end, an objective and introductory approach to Differential Geometry will be provided, with particular emphasis on plane curves. An understanding of the concepts presented requires knowledge of Differential Calculus and Analytic Geometry. Throughout this study, definitions and properties related to plane curves, the tangent vector, arc length, reparametrization, and curvature will be presented in order to provide the necessary background for understanding the proof of the theorem. Finally, an example of a curve that satisfies the hypotheses of the theorem will be presented, along with three counterexamples in which some of these hypotheses are not satisfied.

Keywords: Differential Geometry; Plane Curves; Four Vertex Theorem.

Sumário

Motivação **1**

1 Introdução **2**

2 Curvas Planas **6**

2.1 Curvas Parametrizadas 9

2.2 Classificação das Curvas 15

2.3 Vetor Tangente, Regularidade e Reta Tangente 23

2.4 Reparametrização 31

2.5 Comprimento de Arco 35

2.6 Referencial de Frenet e Curvatura 41

3 Teorema dos Quatro Vértices **56**

4 Considerações Finais **68**

Referências **69**

Motivação

Meu interesse no tema surgiu a partir de um projeto do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) para a II Feira de Matemática do IFBA Campus Valença, ocorrida no dia 7 de outubro de 2025, que envolvia uma ilusão de perspectiva criada pela interseção de um cone com uma pirâmide de base quadrada, gerando quatro curvas que chamaram minha atenção. Nesse projeto, meu orientador me auxiliou nos cálculos e no uso do GeoGebra. Durante essa experiência, ele mostrou algumas relações entre o projeto e o tema proposto, despertando meu interesse pela Geometria Diferencial. Essa experiência motivou-me a aprofundar os conhecimentos na área e desenvolver este Trabalho de Conclusão de Curso.

Capítulo 1

Introdução

A Geometria Diferencial é uma subárea da Matemática originada pela combinação da Geometria Analítica com o Cálculo Diferencial. Seu objetivo é estudar objetos geométricos por meio de conceitos e técnicas do Cálculo, oferecendo uma abordagem mais profunda de curvas e superfícies. De acordo com Boyer (1996), as primeiras formas de Geometria surgiram da necessidade de resolver problemas práticos de medição de terrenos. No entanto, o desenvolvimento da Geometria Diferencial começou efetivamente com o estudo das curvas e superfícies (GORODSKI, 2002).

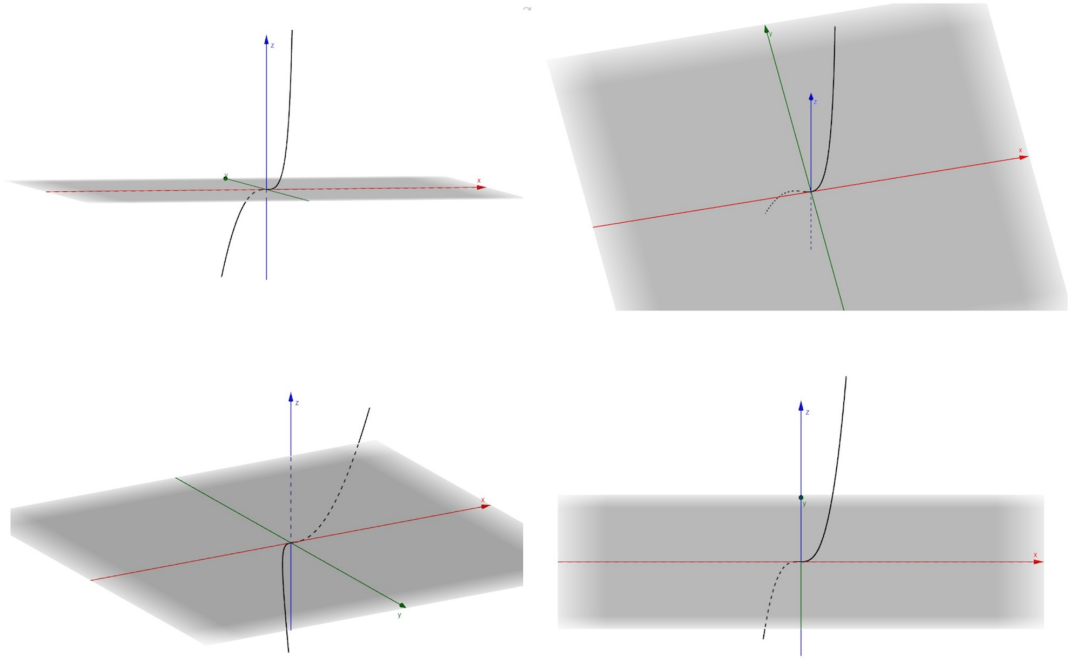
O surgimento [das noções e fundamentos primitivos que sustentaram os pilares iniciais] da Geometria Diferencial tem raízes na Grécia Antiga, onde matemáticos como Euclides (c.325 a.C. - c.265 a.C.), Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) e Apolônio (262 a.C. - 194 a.C.) lançaram as bases da Geometria Clássica e desenvolveram estudos sobre curvas e noções de retas tangentes (GORODSKI, 2002). Por volta de 300 a.C., Euclides escreveu a obra Os Elementos, que, segundo Boyer (1996), consolidou o conhecimento geométrico da época, reunindo de forma sistemática os princípios da Geometria Clássica, baseada em definições, postulados e demonstrações.

Após quase dois milênios, já no século XVII, Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Isaac Newton (1643-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Christian Huygens (1629-1695) aprofundaram os estudos que deram origem à Geometria Diferencial. Segundo Gorodski (2002), os franceses Fermat e Descartes introduziram o método das coordenadas, que deu origem à chamada Geometria Analítica. Pouco tempo depois, o inglês Newton e o alemão Leibniz desenvolveram os fundamentos do cálculo infinitesimal, permitindo o estudo de curvas e superfícies com base em suas propriedades diferenciais. Além disso, o holandês Huygens apresentou os conceitos de evolutas e involutas, provando algumas propriedades de curvas planas.

O primeiro grande avanço na Geometria Diferencial ocorreu no século XVIII, com o suíço Leonhard Euler (1707-1783), que aplicou o Cálculo Diferencial para investigar a curvatura das seções planas de uma superfície (GORODSKI, 2002). Após Euler, o

francês Gaspard Monge (1746-1818) deu um passo fundamental ao sistematizar o estudo das curvas e superfícies no espaço tridimensional; entre outros resultados, determinou a curva de interseção de duas superfícies, cada uma gerada por uma reta que se move cortando três retas reversas no espaço (BOYER, 1996). A figura a seguir é apresentada com caráter meramente ilustrativo, com o objetivo de auxiliar na visualização da situação descrita.

Figura 1.1: Cúbica Retorcida
$\alpha(t) = (t, t^2, t^3),\ t \in \mathbb{R}$



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

No século XIX, o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) consolidou os avanços da Geometria Diferencial com sua obra *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas* [Investigações Gerais sobre Superfícies Curvas], publicada em 1827, por meio da parametrização vetorial de funções de duas variáveis reais e da formulação do conceito de curvatura gaussiana. Assim, inaugurou-se uma área denominada Geometria Intrínseca, que estuda as propriedades geométricas de uma superfície ou objeto independentemente de sua imersão em um espaço externo. Contudo, de acordo com (Katz (2009), apud Fabri e Souza (2016)), os principais feitos dessa obra incluem a definição de isometria e a formulação do Teorema Egregium. Segundo Oliveira e Goulart (2019), o Teorema Egregium demonstrou que a curvatura gaussiana é intrínseca, pois, até então, acreditava-se que era uma propriedade extrínseca das superfícies. Essa descoberta revolucionou a Geometria Diferencial, tornando o teorema um dos mais importantes da área.

O grande passo da Geometria Diferencial foi dado no século XIX pelo alemão Bernhard Riemann (1826-1866), que generalizou as ideias de Gauss ao introduzir o conceito de variedades e ampliar o estudo da Geometria a espaços de dimensões superiores (BOYER, 1996). Essa generalização reflete a tendência matemática da época, marcada pelo aperfeiçoamento da notação e pelo desenvolvimento dos sistemas de coordenadas. As concepções de Riemann forneceram as bases para o desenvolvimento posterior do Cálculo Tensorial e para a formulação da Geometria Riemanniana, uma generalização da Geometria Diferencial que se tornou fundamental para a Matemática e para a Física Moderna (EVES; DOMINGUES, 1994).

Com o passar dos anos, novos avanços surgiram e a Geometria Diferencial foi expandida, tornando-se uma ferramenta essencial para a modelagem de problemas em diversas áreas, como a Astronomia e a Engenharia, e atualmente possui aplicações relevantes na Física, em especial na Teoria da Relatividade. No cenário contemporâneo, o matemático brasileiro Manfredo Perdigão do Carmo (1928-2018) foi uma figura notável, responsável por consolidar a Geometria Diferencial como área de pesquisa no Brasil. Suas obras tornaram-se referência fundamental para estudantes e pesquisadores da área (IMPA, 2018).

Sob essa perspectiva, o estudo apresentado aborda conceitos fundamentais da Geometria Diferencial relacionados às curvas planas, tendo como objetivo central demonstrar o Teorema dos Quatro Vértices. Este teorema afirma que toda curva regular, fechada, simples e convexa possui pelo menos quatro pontos críticos para a curvatura, correspondentes aos seus máximos e mínimos locais, conhecidos como vértices da curva.

A partir desse enfoque teórico, o presente trabalho caracteriza-se, quanto à sua natureza, como pesquisa pura, voltada à ampliação do conhecimento no campo da Geometria Diferencial, visando o estudo e à sistematização de conceitos da área (GIL, 2017). Diante disso, o trabalho foi conduzido por meio de técnicas de pesquisa bibliográfica, que, conforme Gil (2008, p. 50), "é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". Nesse contexto, a pesquisa bibliográfica é essencial para explorar estudos anteriores e estabelecer bases sólidas para a investigação.

A estrutura do trabalho está organizada em quatro capítulos, que são: *Capítulo* 1 - *Introdução*; *Capítulo* 2 - *Curvas Planas*; *Capítulo* 3 - *O Teorema dos Quatro Vértices*; *Capítulo* 4 - *Considerações Finais*. A seguir, apresentam-se, de forma detalhada, os tópicos abordados em cada capítulo deste trabalho.

O *Capítulo* 2 - *Curvas Planas* tem o propósito de introduzir alguns conceitos fundamentais da Geometria Diferencial de curvas planas, como definições de curvas parametrizadas diferenciáveis, curvatura e comprimento de arco, entre outros. O objetivo é conduzir o leitor ao acesso às ferramentas necessárias para a compreensão da demonstração do Teorema dos Quatro Vértices. As principais referências utilizadas na construção deste capítulo são obras clássicas e contemporâneas da área, como Carmo (2005), Tenen-

blat (2008), Alencar, Santos e Neto (2020). Algumas figuras apresentadas ao longo do capítulo foram elaboradas com o auxílio do software *GeoGebra*, enquanto outras foram obtidas a partir de registros de corridas no aplicativo *Strava*[1].

O *Capítulo 3 - O Teorema dos Quatro Vértices* tem como objetivo apresentar e demonstrar o principal resultado deste trabalho: o referido teorema. Inicialmente, será apresentada uma breve contextualização histórica acerca da origem do teorema. Em seguida, serão introduzidos alguns conceitos fundamentais para a compreensão da demonstração, como curvas convexas e vértices de uma curva, além de alguns resultados do Cálculo Diferencial e Integral necessários para a demonstração do teorema. Por fim, será demonstrado o teorema e mencionado um exemplo em que o teorema é válido e três contraexemplos nos quais algumas de suas hipóteses não são satisfeitas e, portanto, o teorema não se aplica.

Por fim, o *Capítulo 4 - Considerações Finais* apresenta reflexões sobre os conceitos abordados ao longo do estudo, destacando a importância da Geometria Diferencial e do Teorema dos Quatro Vértices, o qual estabelece que toda curva regular, fechada, simples e convexa possui pelo menos quatro vértices. Esse resultado é fundamental para a compreensão das propriedades das curvas planas, contribuindo para o avanço da Geometria Diferencial e da pesquisa na área de Matemática.

[1] Aplicativo de monitoramento de atividades físicas com características de rede social, que utiliza GPS para registrar exercícios como corrida e ciclismo, além de oferecer suporte a outras modalidades, inclusive em ambientes fechados.

Capítulo 2

Curvas Planas

Neste capítulo, trataremos de alguns conceitos e resultados fundamentais sobre curvas no $\mathbb{R}^2$, que serão essenciais para o entendimento do Teorema dos Quatro Vértices. Alguns resultados envolvendo propriedades de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial serão omitidos, visto que não constituem o foco principal deste estudo. É importante ressaltar que, embora o presente trabalho se restrinja ao estudo de curvas em $\mathbb{R}^2$, existem também o estudo das curvas em $\mathbb{R}^3$, como podem ser vistas em (CARMO, 2005), bem como curvas em dimensões superiores. Utilizaremos como referências (TENENBLAT, 2008), (CARMO, 2005) e (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2020), nas quais são apresentados os conceitos e resultados sobre curvas no $\mathbb{R}^2$ que norteiam o desenvolvimento deste capítulo.

De forma intuitiva, uma curva pode ser compreendida como o caminho descrito por um ponto móvel em um plano. Para ilustrar essa ideia, imagine uma corrida: o corredor representa um ponto que se desloca ao longo do percurso; o percurso realizado da largada até a linha de chegada determina a curva. Nesse contexto, as ruas estão contidas no plano em que a curva está contida, enquanto a trajetória do corredor representa o conjunto de pontos que a compõem.

Assim, a curva pode ser entendida como a trajetória descrita por um ponto móvel em um plano, variando continuamente ao longo do tempo, como ilustra a Figura 2.1. O marcador verde indica a posição inicial (largada), enquanto o marcador quadriculado representa a posição final (chegada). A trajetória total do corredor, formada pela linha laranja, representa a curva descrita pelo deslocamento no plano, conforme o registro do aplicativo Strava.

Figura 2.1: Representação da trajetória da corrida



(a) Modo mapa. (b) Modo satélite.

Fonte: Strava (2025).

Um ramo da Matemática de fundamental importância é a Geometria Algébrica, que teve como ponto inicial o estudo das curvas. De acordo com a Geometria Analítica, uma curva algébrica em $\mathbb{R}^2$ é definida como o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaçam a equação $f(x, y) = 0$, em que f é uma função polinomial de duas variáveis reais. Assim, podemos definir formalmente uma curva algébrica como:

Definição 2.1 (Curva Algébrica)**.** *O conjunto $\mathcal{C}$ de todos os pontos cartesianos que satisfazem a equação $f(x, y) = 0$, dado por*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\},$$

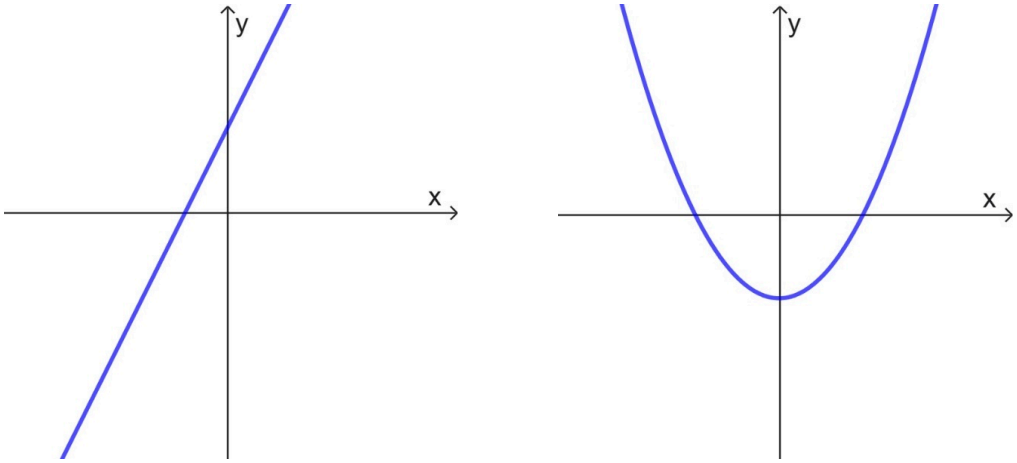
no qual $f(x, y)$ é um polinômio em duas variáveis, é denominado curva algébrica.

Vale salientar que, embora algumas funções apresentem expressões já conhecidas, certos conjuntos podem não corresponder à concepção do que intuitivamente se entende por uma curva. Ou seja, o fato de um conjunto ser definido por uma equação $f(x, y) = 0$ não garante que o conjunto seja uma curva.

Por exemplo, para a função $f(x, y) = xy$, a equação $f(x, y) = 0$ descreve o conjunto formado pelos eixos coordenados. Este conjunto, apesar de não parecer uma curva convencional (representando a trajetória de um ponto em movimento), se enquadra na definição de curva algébrica apresentada.

Muitas das curvas importantes da Geometria Analítica são curvas algébricas. A seguir, apresentamos as Figuras 2.2, 2.3 e 2.4, que ilustram alguns exemplos dessas curvas.

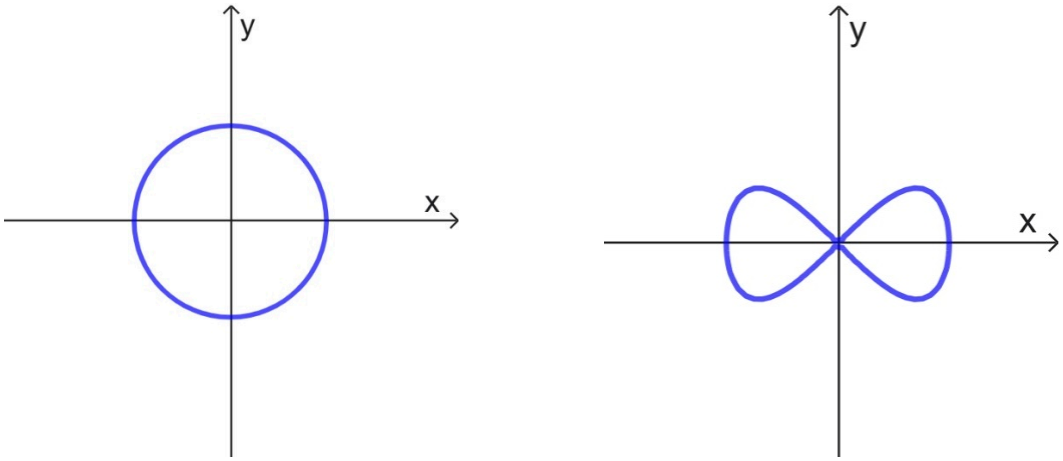
Figura 2.2: Reta e Parábola



(a) $2x - y + 1 = 0$. (b) $x^2 - y - 1 = 0$.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

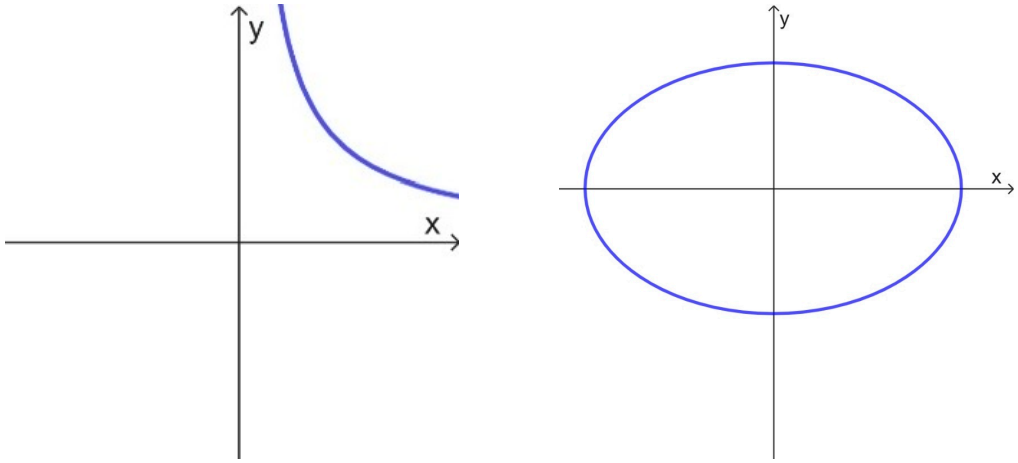
Figura 2.3: Circunferência e Lemniscata



(a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$. (b) $x^4 - x^2 + y^2 = 0$.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Figura 2.4: Hipérbole e Elipse



(a) $\sqrt{x}\sqrt{y} - 1 = 0$. (b) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0$.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

2.1 Curvas Parametrizadas

Nesta seção, adotamos inicialmente uma abordagem intuitiva para o estudo de curvas parametrizadas diferenciáveis, com o objetivo de facilitar a compreensão geométrica do movimento descrito por um ponto no plano. Em um momento posterior, essas noções serão formalizadas por meio das definições de curvas de classe C^r e curvas suaves, permitindo maior rigor ao desenvolvimento teórico.

No contexto da Geometria Diferencial, analisamos as curvas por meio de funções vetoriais, em que aplicamos métodos do Cálculo Diferencial, em vez de considerá-las apenas como o conjunto de pontos que satisfazem uma equação cartesiana. Passamos a considerá-las como a trajetória descrita por um ponto móvel em um plano. Dessa forma, representamos a curva C como o movimento contínuo de um ponto cuja posição é dada por uma função $\alpha(t)$, definida para um parâmetro t que varia em um intervalo I. Assim,

$$C = \{\, \alpha(t) \in \mathbb{R}^2 \,;\; t \in I \,\}.$$

Por meio dessa abordagem, podemos descrever a curva C de maneira mais completa, considerando o movimento do ponto $\alpha(t)$, incluindo o sentido da trajetória, a velocidade, a aceleração e outras propriedades associadas. A seguir, apresenta-se formalmente a definição de curva.

Definição 2.2 (Curva Contínua)**.** *Uma curva contínua no plano $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação contínua $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.*

Observação 2.1. *A aplicação α, dada por $\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, é contínua, se e somente se, cada função coordenada $x, y : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.*

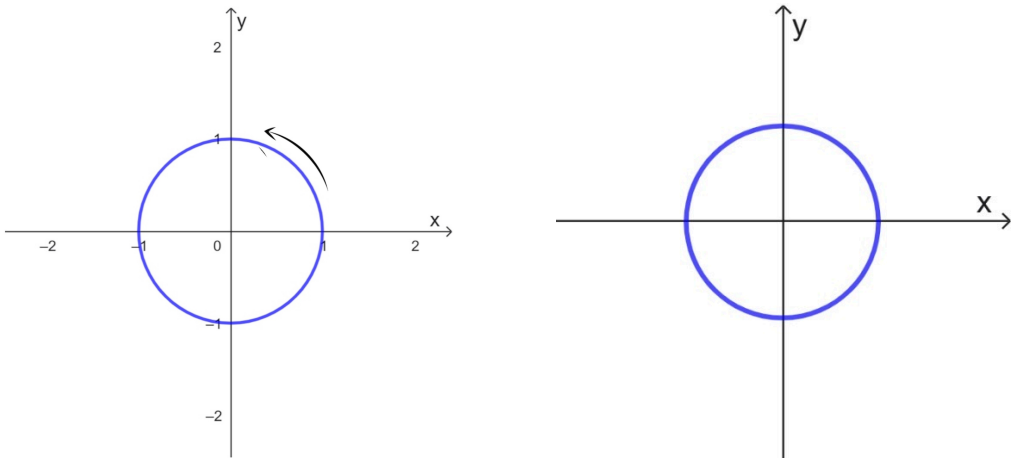
Definição 2.3 (Traço)**.** *Dada a curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, o conjunto imagem $\mathcal{C}$ da aplicação α, dado por*

$$\mathcal{C} = \{\, (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2;\ t \in I \,\},$$

é chamado de traço da curva.

Pela definição, entende-se que a curva contínua representa todo o movimento realizado por um ponto descrito por uma função $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, e não apenas pelo conjunto imagem $\mathcal{C}$. É possível compreender esta noção na Figura 2.5.

Figura 2.5: Curva contínua e Traço da curva



(a) $\alpha(t) = \big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big),\ t \in [0, 2\pi]$. (b) $\mathcal{C} = \big\{\big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big), t \in [0, 2\pi]\big\}$.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

A Figura 2.5 (a) representa uma curva contínua no plano $\mathbb{R}^2$. Para cada valor de t, a função $\alpha(t) = \big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big)$ associa um ponto do plano, descrevendo o movimento contínuo que percorre a circunferência de raio unitário, no sentido anti-horário indicado pela seta. Ou seja, a função $\alpha(t)$ é contínua, já que suas funções coordenadas $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \operatorname{sen}(t)$ são contínuas no intervalo $I = [0, 2\pi]$.

Já na Figura 2.5 (b), apresenta-se o traço da curva, isto é, o desenho da circunferência, sem informações sobre o movimento do ponto que a gera. Dessa forma, consideramos a função $\alpha(t)$ como uma parametrização do conjunto imagem $\mathcal{C}$, conforme a Definição 2.2 de curva contínua.

Por outro lado, dizemos que uma curva é descontínua em um ponto t_0 quando o movimento descrito pelo ponto $\alpha(t)$ sofre interrupções ou saltos ao longo do intervalo no qual está definida. Por exemplo, isso ocorre quando $t_0 = 0 \in I$ se, e somente se $\alpha(0) \neq \lim_{t\to 0} \alpha(t)$ ou quando não existe o limite $\lim_{t\to 0} \alpha(t)$.

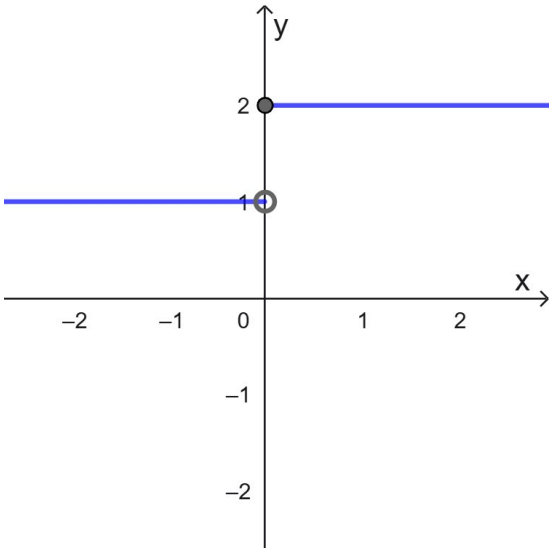
A descrição se torna mais clara ao analisarmos a Figura 2.6. Observamos que, em $t = 0$, a função está definida, pois $\alpha(0) = (0, 2)$. Entretanto, ao analisar os limites laterais, obtemos:

$$\lim_{t\to 0^-} \alpha(t) = (0, 1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 0^+} \alpha(t) = (0, 2).$$

Como os dois limites são diferentes, concluímos que o limite em $t = 0$ não existe, portanto, a curva é descontínua nesse ponto.

Figura 2.6: Curva descontínua $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 1), & \text{se } t < 0, \\ (t, 2), & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Definição 2.4 (Curva Parametrizada Diferenciável)**.** *Uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ do plano é dita diferenciável se é uma aplicação diferenciável, ou seja, as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis.*

Essa característica poderá ser melhor compreendida nos exemplos apresentados a seguir.

Exemplo 2.1. *A curva parametrizada diferenciável dada por*

$$\alpha(t) = \big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big), \ t \in [0, 2\pi],$$

tem como traço a circunferência de raio unitário e centro na origem, representado na Figura 2.5(b).

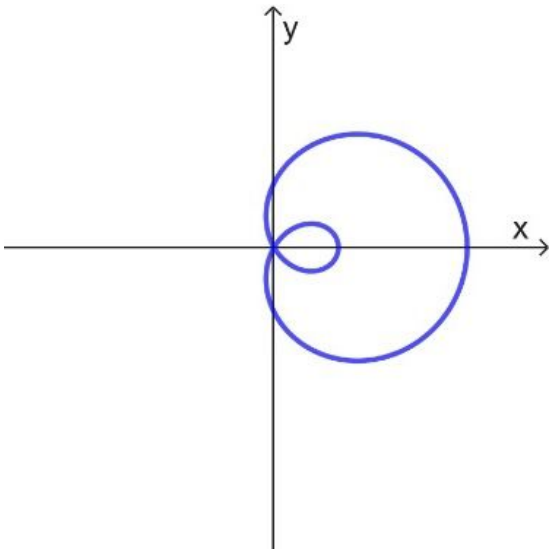
Como as funções coordenadas $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \operatorname{sen}(t)$ são infinitamente diferenciáveis, pois todas as suas derivadas existem e apresentam periodicidade de ordem 4, segue que a curva parametrizada $\alpha(t) = \big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big)$ é de classe C^∞, conceito que será formalizado posteriormente ao serem apresentadas as curvas de classe C^r. Em outras palavras, cada uma de suas funções coordenadas, $x(t)$ e $y(t)$, são infinitamente diferenciáveis.

Exemplo 2.2. *A aplicação* $\alpha(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *que a cada* $t \in \mathbb{R}$ *associa*

$$\alpha(t) = \big(\cos(t)(2\cos(t) - 1),\, \text{sen}(t)(2\cos(t) - 1)\big),$$

é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é uma cardioide.

Figura 2.7: Cardioide



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Vimos no Exemplo 2.1 que as funções $\cos(t)$ e $\text{sen}(t)$ são infinitamente diferenciáveis. Além disso, funções constantes também são infinitamente diferenciáveis, pois suas derivadas são sempre nulas.

Sabemos que a derivada do produto $f(t) \cdot g(t)$ é dada pela regra do produto:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

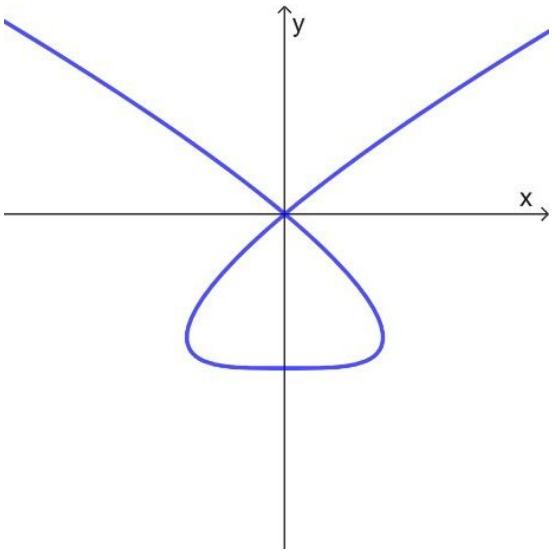
Portanto, dadas as funções coordenadas $x(t) = \cos(t)(2\cos(t)-1)$ e $y(t) = \text{sen}(t)(2\cos(t)-1)$, temos que cada uma delas é o produto de duas funções infinitamente diferenciáveis, e concluímos que $\alpha(t) = \big(\cos(t)\,(2\cos(t) - 1),\, \text{sen}(t)\,(2\cos(t) - 1)\big)$ é uma função de classe C^∞.

Exemplo 2.3. *A curva parametrizada dada por*

$$\alpha(t) = \big(t^5 - 2t, t^4 - 2\big),\ t \in \mathbb{R},$$

é diferenciável, e tem o seu traço representado na Figura 2.8.

Figura 2.8



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Pela regra da potência, as funções t^5, t^4 e t são infinitamente diferenciáveis. No caso de potências, aplica-se a regra segundo a qual a derivada de x^n é

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

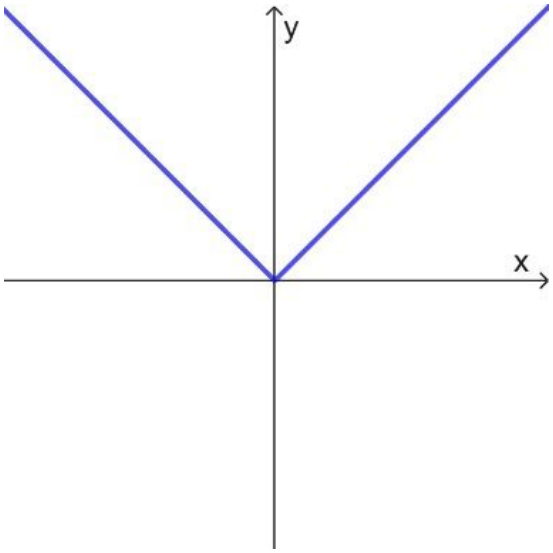
Após algumas derivações sucessivas, cada uma dessas funções se reduz a uma constante, e como funções constantes também são infinitamente diferenciáveis, concluímos que $\alpha(t) = \big(t^5 - 2t,\ t^4 - 2\big)$ é de classe C^∞.

Exemplo 2.4. *A aplicação $\alpha(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa*

$$\alpha(t) = \big(t, |t|\big),$$

não é uma curva parametrizada diferenciável, pois a função $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$. Seu traço pode ser observado na Figura 2.9.

Figura 2.9



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

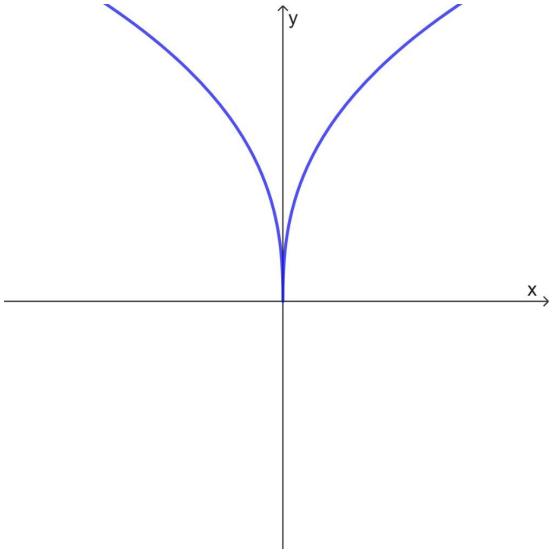
Por outro lado, o fato de a curva apresentar um bico (cúspide) não implica necessariamente que ela não seja uma curva parametrizada diferenciável. No Exemplo 2.5 abaixo, a curva possui uma cúspide, mas ainda assim sua parametrização é diferenciável.

Exemplo 2.5. *A curva parametrizada diferenciável dada por*

$$\alpha(t) = \left(t^5, t^2\right),\ t \in \mathbb{R},$$

tem o seu traço representado na Figura 2.10.

Figura 2.10



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Nesse caso, a curva possui uma cúspide, mas suas funções coordenadas $x(t) = t^5$ e $y(t) = t^2$ são infinitamente diferenciáveis pela regra da potência explicada no Exemplo 2.3. Assim, concluímos que $\alpha(t) = \big(t^5,\ t^2\big)$ é uma função de classe C^∞.

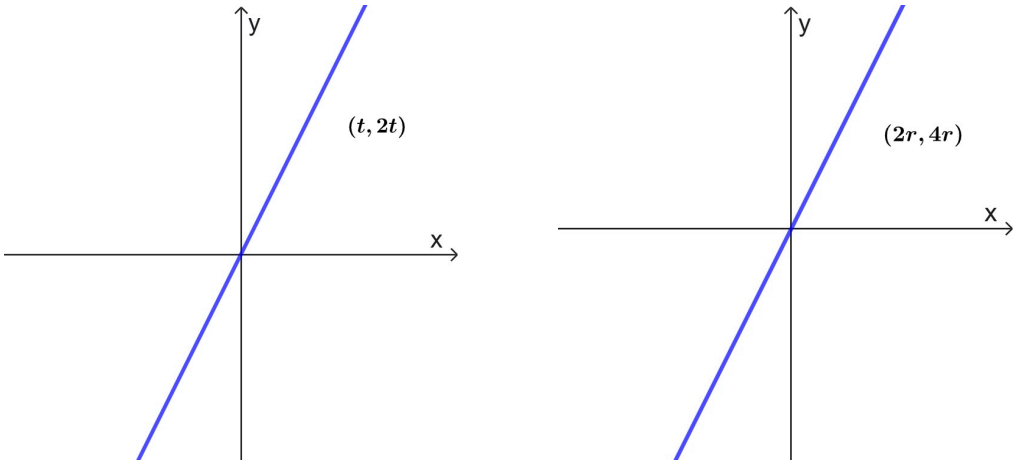
É importante destacar que duas curvas parametrizadas diferenciáveis podem ser diferentes como funções, embora determinem exatamente o mesmo traço. Na Seção 2.4, essa ideia será compreendida formalmente por meio da reparametrização, pela qual, a partir de uma curva regular, obtém-se outra curva com o mesmo traço. No Exemplo 2.6 a seguir, observamos duas curvas distintas que descrevem o mesmo traço no plano.

Exemplo 2.6. *As curvas parametrizadas diferenciáveis dadas por*

$$\alpha(t) = \big(t,\ 2t\big),\ t \in \mathbb{R},$$
$$\beta(r) = \big(2r,\ 4r\big),\ r \in \mathbb{R},$$

têm o mesmo traço representado na Figura 2.11.

Figura 2.11: Reta



(a) $\alpha(t) = \big(t, 2t\big),\ t \in \mathbb{R}.$ (b) $\beta(r) = \big(2r, 4r\big),\ r \in \mathbb{R}.$

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

2.2 Classificação das Curvas

Nesta seção, são apresentadas classificações fundamentais das curvas planas, tais como curvas simples e curvas fechadas. Esses conceitos constituem a base necessária para a formulação e a compreensão do Teorema dos Quatro Vértices.

Definição 2.5 (Curva Fechada)**.** *Uma curva fechada no plano $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação contínua $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, definida em um intervalo $I = [a, b]$, tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$.*

Nesse caso, uma curva é dita fechada quando o seu ponto inicial $\alpha(a)$ coincide com o ponto final $\alpha(b)$. Para ilustrar essa ideia, considere uma corrida em que a largada (ponto

inicial), indicado pelo marcador verde, e a chegada (ponto final), indicado pelo marcador quadriculado. Se ambos ocorrem no mesmo local, então toda a trajetória percorrida pelo corredor, representada pela linha laranja, forma uma curva fechada. Essa situação é exemplificada na Figura 2.12, caracterizando uma curva fechada cujo início e fim são coincidentes.

Figura 2.12



Fonte: Strava (2025).

Por outro lado, quando o ponto inicial $\alpha(a)$ não coincide com o ponto final $\alpha(b)$, dizemos que a curva não é fechada. Um exemplo disso é uma corrida em que o local da largada (ponto inicial), indicado pelo marcador verde, é diferente do local da chegada (ponto final), indicado pelo marcador quadriculado, como ilustra a Figura 2.13.

Figura 2.13



Fonte: Strava (2025).

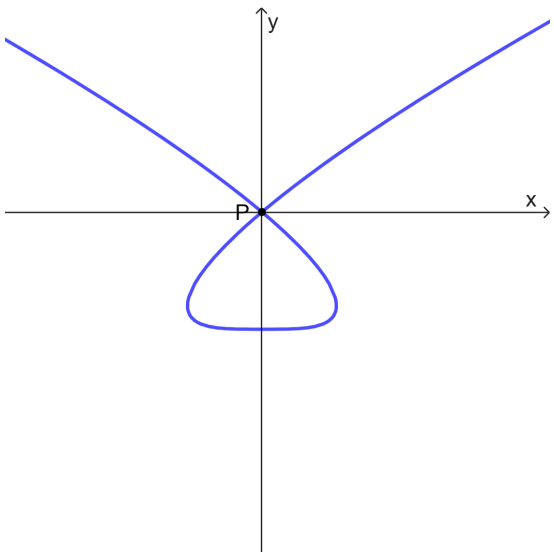
Nessa situação, consideramos a Figura 2.13 uma curva simples, pois ela não se cruza nem se toca em nenhum ponto. Assim, enunciamos a definição de curva simples a seguir.

Definição 2.6 (Curva Simples)**.** *Uma curva simples no plano* $\mathbb{R}^2$ *é uma aplicação* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$*, tal que* α *é injetiva.*

Observação 2.2. *Futuramente, será apresentada a definição de curva fechada simples. Por questões de inconsistências nas nomenclaturas obtidas das fontes bibliográficas, é possível que uma curva seja fechada simples, mas não seja simples.*

Note que, quando temos $\alpha(a) = \alpha(b)$, com $a, b \in I$, tais que $a \neq b$, dizemos que os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são pontos duplos (ou pontos múltiplos) da curva α. Isso significa que a curva passa mais de uma vez pelo mesmo ponto do plano.

Figura 2.14



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Na figura anterior, encontra-se representada a curva dada por $\alpha(t) = (t^5 - 2t,\ t^4 - 2),\ t \in \mathbb{R}$. Considerando os valores $t = \pm\sqrt[4]{2}$, substituindo em α, obtemos

$$\alpha\Big(\pm\sqrt[4]{2}\Big) = \Big(\big(\pm\sqrt[4]{2}\big)^5 - 2\big(\pm\sqrt[4]{2}\big),\ \big(\pm\sqrt[4]{2}\big)^4 - 2\Big).$$

Como

$$\big(\pm\sqrt[4]{2}\big)^4 = 2 \text{ e } \big(\pm\sqrt[4]{2}\big)^5 = \pm 2\sqrt[4]{2},$$

segue que

$$\big(\pm\sqrt[4]{2}\big)^5 - 2\big(\pm\sqrt[4]{2}\big) = \pm 2\sqrt[4]{2} - \big(\pm 2\sqrt[4]{2}\big) = 0,$$

e

$$\big(\pm\sqrt[4]{2}\big)^4 - 2 = 2 - 2 = 0.$$

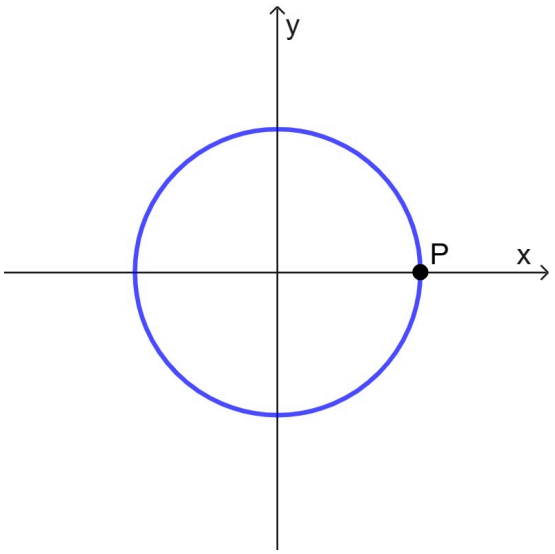
Logo,

$$\alpha\big(\sqrt[4]{2}\big) = \alpha\big(-\sqrt[4]{2}\big) = (0,0).$$

Dessa forma, os pontos $\alpha\big(\sqrt[4]{2}\big)$ e $\alpha\big(-\sqrt[4]{2}\big)$ constituem um ponto múltiplo P da curva α, resultando na origem.

Considerando a curva parametrizada da circunferência representada na Figura 2.15, dada por $\alpha(t) = \big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big)$, $t \in [0, 2\pi]$, temos que $\alpha(0) = (1,0)$ e $\alpha(2\pi) = (1,0)$. Logo, $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$, embora $0 \neq 2\pi$. Dessa forma, os pontos $\alpha(0)$ e $\alpha(2\pi)$ constituem um ponto múltiplo P da curva α. Vale salientar que a presença de pontos múltiplos indica que a curva não é injetiva.

Figura 2.15



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Por sua vez, a Figura 2.15 representa uma curva fechada simples, denominada Curva de Jordan, conforme apresenta a definição a seguir.

Definição 2.7 (Curva de Jordan)**.** *Uma curva $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é dita fechada simples se $\alpha(a) = \alpha(b)$ e para quaisquer $t, s \in [a,b)$ tais que $t \neq s$, tem-se $\alpha(t) \neq \alpha(s)$, isto é, quando o único ponto múltiplo de α ocorre em seus pontos inicial e final. Uma curva fechada simples é denominada curva de Jordan.*

Definição 2.8 (Curva Periódica)**.** *Uma curva periódica no plano $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ para a qual existe um número real $l > 0$ tal que*

$$\alpha(t + l) = \alpha(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Embora uma curva periódica possa admitir diversos valores $l > 0$ que satisfaçam $\alpha(t + l) = \alpha(t)$, o menor valor positivo (sendo α uma curva não-constante) l_0 tal que

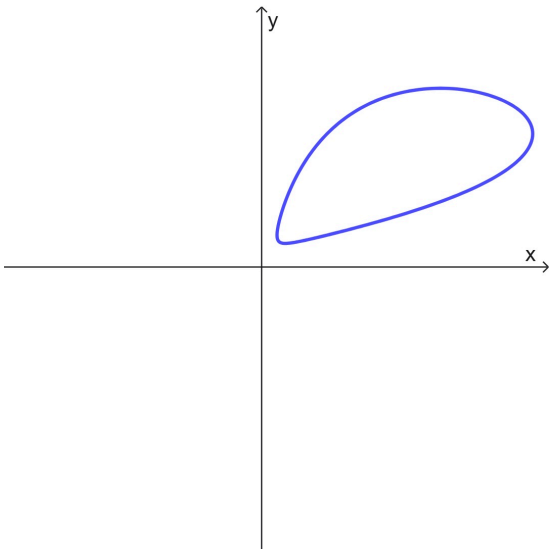
$\alpha(t+l_0)=\alpha(t)$, para todo $t\in\mathbb{R}$, é chamado de período da curva. A seguir, apresentam-se alguns exemplos de curvas periódicas.

Exemplo 2.7. *A curva periódica dada por*

$$\alpha(t)=\left(e^{\cos(t)+\operatorname{sen}(t)},e^{\cos(t)}\right),\ t\in\mathbb{R},$$

tem como traço a Figura 2.16.

Figura 2.16



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Note que as funções envolvidas, $\operatorname{sen}(t)$ e $\cos(t)$, são periódicas de período 2π. Isto é, a cada 2π, o comportamento da curva se repete, retornando aos mesmos pontos. Verifica-se também que a soma $\operatorname{sen}(t)+\cos(t)$ também é uma função periódica de período 2π. Assim, temos

$$\alpha(t+2\pi)=\left(e^{\cos(t+2\pi)+\operatorname{sen}(t+2\pi)},e^{\cos(t+2\pi)}\right)=\left(e^{\cos(t)+\operatorname{sen}(t)},e^{\cos(t)}\right)=\alpha(t),\ t\in\mathbb{R},$$

logo, α é uma curva periódica com período $l=2\pi$.

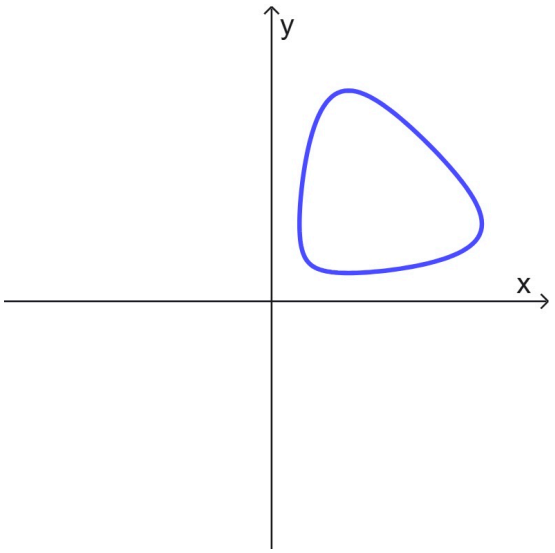
Além de 2π, existem outros valores positivos de l que satisfazem $\alpha(t+l)=\alpha(t)$, como 4π, 6π e assim sucessivamente. O menor período positivo, isto é, $l_0=2\pi$, é chamado de período da curva.

Exemplo 2.8. *A curva periódica dada por*

$$\alpha(t)=\left(e^{\cos(2t)},e^{\operatorname{sen}(2t)}\right),\ t\in\mathbb{R},$$

tem como traço a Figura 2.17.

Figura 2.17



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Neste exemplo, observamos que, embora as funções envolvidas sejam seno e cosseno, o período da curva não é 2π, como ocorreu no exemplo anterior. Isso acontece porque as funções consideradas são $\cos(2t)$ e $\operatorname{sen}(2t)$. O fator $2t$ faz com que as funções seno e cosseno completem um ciclo em um intervalo menor. De fato, enquanto $\operatorname{sen}(t)$ e $\cos(t)$ possuem período 2π, as funções $\operatorname{sen}(2t)$ e $\cos(2t)$ têm período π. Assim, quando t varia de π, o comportamento da curva já se repete, retornando aos mesmos pontos. Dessa forma, temos

$$\alpha(t+\pi) = \left(e^{\cos(2(t+\pi))}, e^{\operatorname{sen}(2(t+\pi))}\right) = \left(e^{\cos(2t)}, e^{\operatorname{sen}(2t)}\right) = \alpha(t),\ t \in \mathbb{R},$$

logo, α é uma curva periódica com período $l = \pi$.

Além de π, existem outros valores positivos de l que satisfazem $\alpha(t+l) = \alpha(t)$, como 2π, 3π e assim sucessivamente. O menor período positivo, isto é, $l_0 = \pi$, é chamado de período da curva.

Definição 2.9 (Gráfico)**.** *Dada uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$, o gráfico de f é o conjunto*

$$G = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R};\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

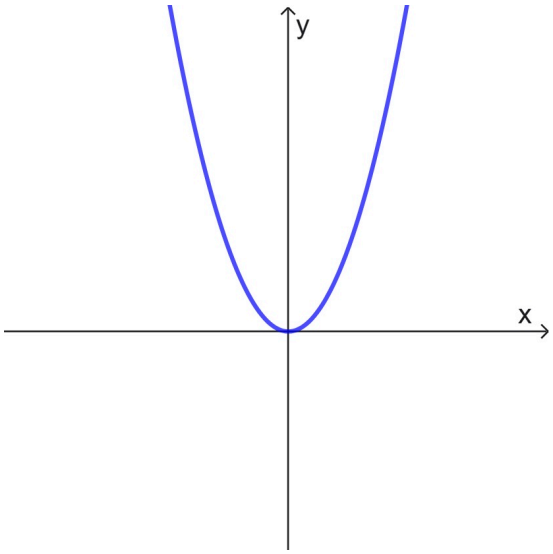
O gráfico G é a imagem da parametrização de uma curva contínua $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = \big(t, f(t)\big).$$

Note que, no gráfico de uma função, escolhe-se um valor de x no intervalo definido, calcula-se $f(x)$ e marca-se o ponto correspondente no plano. O conjunto de todos esses pontos forma o desenho da função. De maneira análoga, ao utilizar um parâmetro t,

define-se uma curva em que o valor de t indica a posição no eixo x, enquanto $f(t)$ representa a altura no eixo y. À medida que t varia, o ponto $\big(t, f(t)\big)$ se move continuamente, descrevendo o gráfico da função.

Figura 2.18



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Observe que a Figura 2.18 apresenta o gráfico da função $f(x) = x^2$, o qual pode ser descrito como o conjunto

$$G = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \; ; \; y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

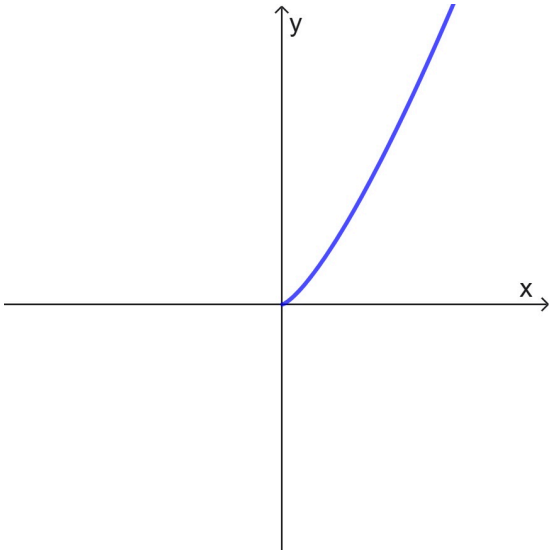
Esse gráfico pode ser interpretado como o traço de uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = \big(t, f(t)\big) = (t, t^2), \; t \in \mathbb{R}.$$

Assim, à medida que o parâmetro t varia em $\mathbb{R}$, o ponto (t, t^2) percorre o plano, descrevendo exatamente o gráfico da função $f(x) = x^2$.

Definição 2.10 (Curva de Classe C^r)**.** *Uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ do plano é uma aplicação de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. Dizemos que essa curva é de classe C^r, com $r \geq 1$, se as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis de classe C^r.*

Figura 2.19



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Considere a curva parametrizada $\alpha : [0, \infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (t, t^{4/3}),\ t \in \mathbb{R},$$

cujo traço é ilustrado na Figura 2.19. As funções coordenadas dessa curva são $x(t) = t$ e $y(t) = t^{4/3}$. A primeira função coordenada, $x(t) = t$, é infinitamente diferenciável, isto é, de classe C^∞. Em particular, ela pertence à classe C^r para todo $r \geq 1$.

Já a segunda função coordenada, $y(t) = t^{4/3}$, não é de classe C^∞. Em particular, ela não pertence à classe C^r para todo $r \geq 1$. Calculando a sua primeira derivada, obtemos

$$y'(t) = \frac{4}{3}t^{1/3},$$

a qual está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $y(t)$ é uma função de classe C^1. Calculando a segunda derivada, temos

$$y''(t) = \frac{4}{9}t^{-2/3},$$

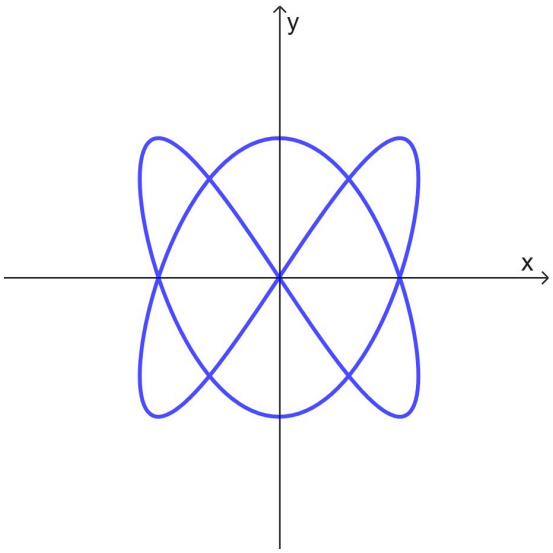
a qual não está definida em $t = 0$. Logo, a função $y(t)$ não é de classe C^2. Portanto, concluímos que a curva parametrizada

$$\alpha(t) = (t, t^{4/3})$$

é de classe C^1, mas não é de classe C^2.

Definição 2.11 (Curva Suave)**.** *Uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é dita suave se suas funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis de classe C^∞.*

Figura 2.20: Curva de Lissajous



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Na Figura 2.20, temos a curva de Lissajous $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = \big(\operatorname{sen}(at), \operatorname{sen}(bt)\big),\ t \in \mathbb{R},$$

com $a, b > 0$ e $a \neq b$. A figura ilustra o traço da curva α no caso em que $a = 2$ e $b = 3$. Além disso, note que a lemniscata, que será apresentada posteriormente e cuja parametrização é dada por $\alpha(t) = \big(\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(2t)\big)$, é um caso particular da curva de Lissajous, quando $a = 1$ e $b = 2$, conforme ilustrado na Figura 2.3 (b). Como as funções coordenadas envolvidas, $x(t) = \operatorname{sen}(2t)$ e $y(t) = \operatorname{sen}(3t)$, são infinitamente diferenciáveis, ou seja, pertencem a C^∞, e a composição de funções preserva essa propriedade, concluímos que

$$\alpha(t) = \big(\operatorname{sen}(2t), \operatorname{sen}(3t)\big)$$

é uma curva suave.

2.3 Vetor Tangente, Regularidade e Reta Tangente

Nesta seção, será introduzido os conceitos de vetor tangente, curva regular e reta tangente. Estabelecemos a condição de não anulação da derivada da parametrização, garantindo que a direção tangente esteja bem definida em cada ponto da curva.

Definição 2.12 (Vetor Tangente)**.** *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que, a cada $t \in I$, associa $\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. O vetor*

$$\alpha'(t_0) = \big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$$

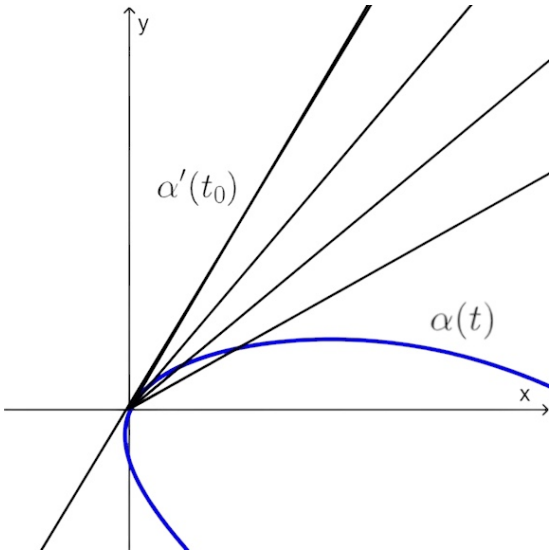
é chamado de vetor tangente (ou vetor velocidade) da curva α em t_0.

Definição 2.13 (Velocidade Escalar)**.** *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. A velocidade escalar da curva α em $t_0 \in I$, é definida pelo módulo do vetor tangente, isto é,*

$$||\alpha'(t_0)|| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

Pela definição, entende-se que o representante do vetor tangente com origem no respectivo ponto da curva indica o sentido do movimento no instante em que se passa por este ponto. Por outro lado, a velocidade escalar indica o quão rápido o ponto se move sobre a curva. Vale salientar que, quando $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, ele aponta a direção tangente à curva α em t. É possível compreender esta noção na Figura 2.21.

Figura 2.21: Vetor Tangente



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Observamos que o vetor $\alpha'(t_0)$ determina a direção da reta tangente à curva α no ponto $\alpha(t_0)$. Essa reta pode ser entendida como o limite das retas secantes à curva α, que passam pelos pontos $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$, quando o parâmetro t tende a t_0. Assim, a reta tangente é obtida matematicamente por meio do limite

$$\alpha'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}.$$

A seguir, apresentam-se alguns exemplos de curvas com seus respectivos vetores tangentes.

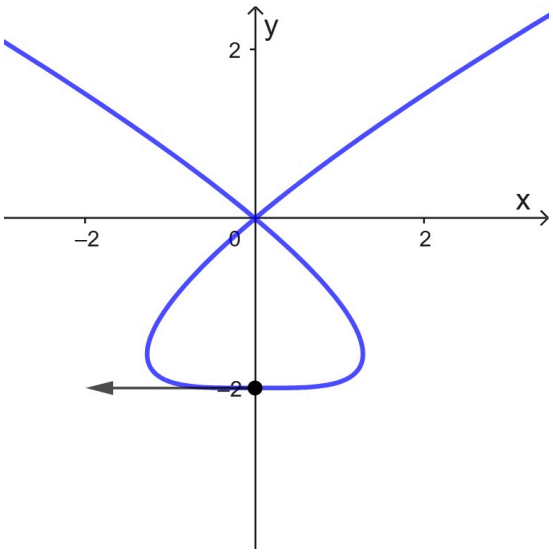
Exemplo 2.9. *Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que, para cada t, associa*

$$\alpha(t) = \big(t^5 - 2t, t^4 - 2\big), \ t \in \mathbb{R}.$$

O vetor tangente à curva α em t é dado por

$$\alpha'(t) = \big(5t^4 - 2, 4t^3\big).$$

Figura 2.22



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Note que o vetor tangente a uma curva α é definido em função do parâmetro t, e não diretamente no ponto $\alpha(t)$. No Exemplo 2.9, o vetor tangente da curva α é dado por

$$\alpha'(t) = \big(5t^4 - 2, 4t^3\big).$$

Para o valor do parâmetro $t = 0$, a curva passa pelo ponto $\alpha(0) = (0, -2)$, e o vetor tangente correspondente é $\alpha'(0) = (-2, 0)$. Esse vetor indica que a direção tangente à curva nesse ponto é horizontal e aponta no sentido negativo do eixo x.

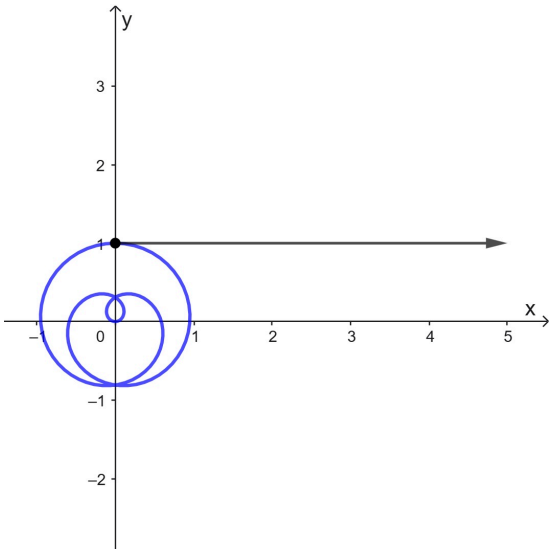
Exemplo 2.10. *Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que, para cada t, associa*

$$\alpha(t) = \big(\operatorname{sen}(5t)\cos(t), \cos(5t)\cos(t)\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

O vetor tangente à curva α em t é dado por

$$\alpha'(t) = \big(5\cos(5t)\cos(t) - \operatorname{sen}(5t)\operatorname{sen}(t), -5\operatorname{sen}(5t)\cos(t) - \cos(5t)\operatorname{sen}(t)\big).$$

Figura 2.23



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Para o valor do parâmetro $t = 0$, a curva passa pelo ponto $\alpha(0) = (0, 1)$, e o vetor tangente correspondente é $\alpha'(0) = (5, 0)$. Esse vetor indica que a direção tangente à curva nesse ponto é horizontal e aponta no sentido positivo do eixo x.

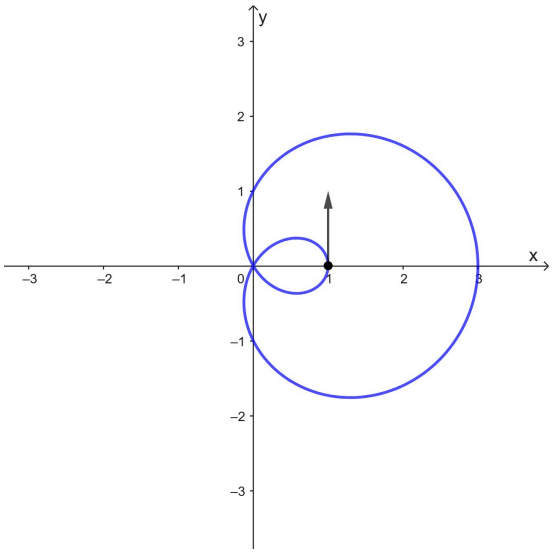
Exemplo 2.11. *Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que, para cada t, associa*

$$\alpha(t) = \big(\cos(t)(2\cos(t) - 1), \operatorname{sen}(t)(2\cos(t) - 1)\big), \ t \in \mathbb{R}.$$

O vetor tangente à curva α em t é dado por

$$\alpha'(t) = \big(-\operatorname{sen}(t)\,(4\cos(t) - 1), \cos(t)\,(2\cos(t) - 1) - 2\operatorname{sen}^2(t)\big).$$

Figura 2.24



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Para o valor do parâmetro $t = 0$, a curva passa pelo ponto $\alpha(0) = (1, 0)$, e o vetor tangente correspondente é $\alpha'(0) = (0, 1)$. Esse vetor indica que a direção tangente à curva nesse ponto é vertical e aponta no sentido positivo do eixo y.

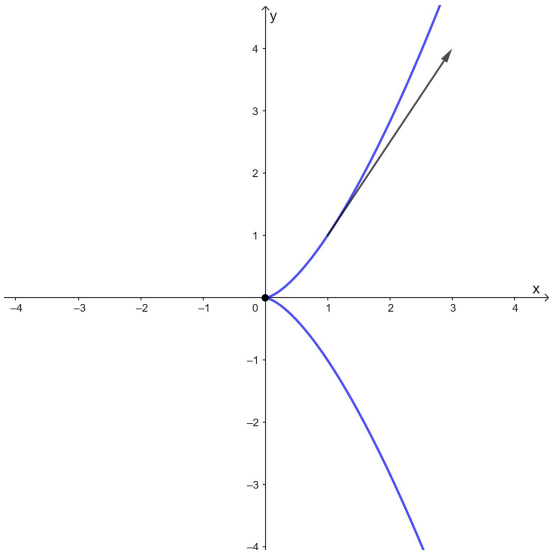
Exemplo 2.12. *Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que, para cada t, associa*

$$\alpha(t) = \big(t^2, t^3\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

O vetor tangente à curva α em t é dado por

$$\alpha'(t) = \big(2t, 3t^2\big).$$

Figura 2.25



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Note que, para o valor do parâmetro $t = 0$, a curva passa pelo ponto $\alpha(0) = (0, 0)$, e o vetor tangente correspondente é $\alpha'(0) = (0, 0)$, ou seja, a curva α possui vetor tangente nulo em $t = 0$. Nesse caso, não é possível determinar uma direção tangente bem definida à curva no ponto $\alpha(0)$, pois o vetor tangente não fornece informação direcional. Entretanto, para o valor do parâmetro $t = 1$, a curva passa pelo ponto $\alpha(1) = (1, 1)$, e o vetor tangente correspondente é $\alpha'(1) = (2, 3)$. Esse vetor indica que a direção tangente à curva nesse ponto é oblíqua (inclinada).

Exemplo 2.13. *Analisamos a velocidade escalar para cada ponto da curva parametrizada diferenciável dada por*

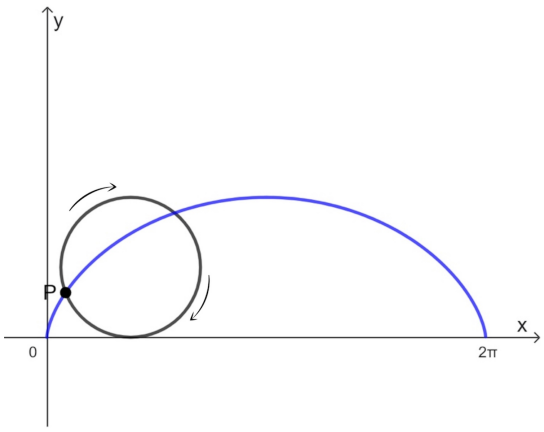
$$\alpha(t) \ = \ \big(t - \ \mathrm{sen}(t), 1 - \cos(t)\big),\ t \in [0, 2\pi].$$

O vetor tangente à curva α em t é dado por

$$\alpha'(t) \ = \ \big(1 - \cos(t),\ \mathrm{sen}(t)\big).$$

O traço da curva é um arco de cicloide, isto é, gerado pela trajetória do ponto P de um círculo de raio unitário que rola, sem deslizar, com velocidade constante e unitária, no sentido horário sobre o eixo Ox, como ilustra a Figura 2.26.

Figura 2.26: Cicloide



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Podemos interpretar o círculo de raio unitário como o pneu de um carro em movimento. Calculando a velocidade escalar, temos:

$$||\alpha'(t)|| = \sqrt{\big(1-\cos(t)\big)^2 + \operatorname{sen}^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) + 1 - 2\cos(t)}.$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$, obtemos

$$||\alpha'(t)|| = \sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{2\big(1-\cos(t)\big)}.$$

Aplicando a identidade $1 - \cos(t) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$, segue que

$$||\alpha'(t)|| = 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

Do ponto de vista físico, a função velocidade escalar obtida permite interpretar o movimento do ponto P gerador da cicloide ao longo da trajetória. Para $t = 0$, temos $||\alpha'(0)|| = 0$, o que indica que o ponto está instantaneamente em repouso no solo, onde ocorre uma cúspide da cicloide. Para $t = \pi$, temos $||\alpha'(\pi)|| = 2$, e o ponto encontra-se na posição mais alta da trajetória, onde as velocidades de rotação e translação se somam, resultando na velocidade equivalendo ao dobro da velocidade da roda. Para $t = 2\pi$, temos novamente $||\alpha'(2\pi)|| = 0$, indicando que o ponto retorna ao repouso ao tocar novamente o solo, completando um arco de cicloide.

Dessa forma, observa-se que o módulo da velocidade no ponto P não é constante, sendo nula nos pontos de contato com o solo e máxima no ponto mais alto da trajetória, o que reflete o comportamento físico de um ponto localizado na borda de uma roda em rolamento.

Para o desenvolvimento dos próximos conceitos, é necessário que exista uma direção tangente bem definida à curva α para todo valor do parâmetro $t \in \mathbb{R}$, e que o vetor tangente à curva α não seja nulo para nenhum valor de t. Dessa forma, passaremos a estudar apenas as curvas que satisfazem essa condição, as quais são definidas a seguir.

Definição 2.14 (Curva Regular)**.** *Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é chamada regular se $\alpha'(t) \neq (0,0)$ para todo $t \in I$. Caso contrário, a curva é dita não regular, e o ponto $t_0 \in I$ tal que $\alpha'(t_0) = (0,0)$ é chamado de ponto singular da curva.*

Dentre os Exemplos 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12, que apresentam curvas com seus respectivos vetores tangentes, apenas o Exemplo 2.12 não corresponde a uma curva regular. De fato, como já foi visto, para $t = 0$, tem-se $\alpha'(0) = (0,0)$. Assim, dizemos que $t = 0$ é um ponto singular da curva. Observamos que, se a curva α for regular, o vetor $\alpha'(t)$ aponta a direção tangente à curva α no ponto $\alpha(t)$. Essa direção determina a reta tangente à curva, como será formalizado a seguir.

Definição 2.15 (Reta Tangente)**.** *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular diferenciável. Fixado $t \in I$, a reta tangente à curva α em $\alpha(t)$ é dada por*

$$g(r) = \alpha(t) + r\,\alpha'(t),\ \ r \in \mathbb{R}.$$

Pela definição, entende-se que, para determinar a reta tangente a uma curva, esta deve ser regular, ou seja, em todo intervalo da curva o vetor tangente não se anula. A partir desse ponto de vista, calcularemos a reta tangente nos exemplos apresentados a seguir.

Exemplo 2.14. *Tem-se a curva α, chamada lemniscata, dada por*

$$\alpha(t) = \big(\operatorname{sen}(t),\, \operatorname{sen}(2t)\big),\ \ t \in \mathbb{R},$$

cujo vetor tangente é

$$\alpha'(t) = \big(\cos(t), 2\cos(2t)\big).$$

A reta tangente à curva α no ponto $\alpha(t)$ é dada por

$$g(r) = \alpha(t) + r\,\alpha'(t).$$

Substituindo as expressões de $\alpha(t)$ e $\alpha'(t)$, obtemos

$$g(r) = \big(\operatorname{sen}(t),\, \operatorname{sen}(2t)\big) + r\big(\cos(t), 2\cos(2t)\big).$$

Para $t = \frac{\pi}{2}$, *segue que*

$$g(r) = \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}(\pi)\right) + r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), 2\cos(\pi)\right).$$

Como $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\operatorname{sen}(\pi) = 0$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ *e* $\cos(\pi) = -1$, *temos*

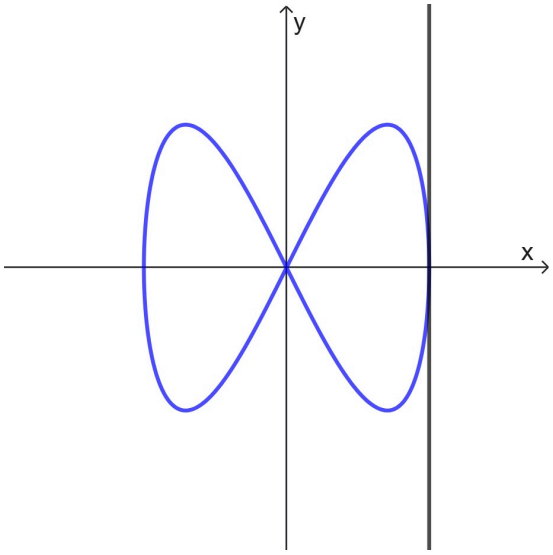
$$g(r) = (1, 0) + r(0, -2).$$

Logo, a reta tangente é dada por

$$g(r) = (1, -2r), \ r \in \mathbb{R},$$

conforme ilustrado na Figura 2.27.

Figura 2.27: Reta Tangente à Lemniscata



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Exemplo 2.15. *Tem-se a curva* α, *chamada rosácea, dada por*

$$\alpha(t) = \big(\cos(10t)\operatorname{sen}(t), \cos(10t)\cos(t)\big), \ t \in \mathbb{R},$$

cujo vetor tangente é

$$\alpha'(t) = \big(-10\operatorname{sen}(10t)\operatorname{sen}(t) + \cos(10t)\cos(t), -10\operatorname{sen}(10t)\cos(t) - \cos(10t)\operatorname{sen}(t)\big).$$

A reta tangente à curva α *no ponto* $\alpha(t)$ *é dada por*

$$g(r) = \alpha(t) + r\,\alpha'(t).$$

Substituindo as expressões de $\alpha(t)$ *e* $\alpha'(t)$, *obtemos*

$$\begin{aligned} g(r) = {} & \big(\cos(10t)\operatorname{sen}(t), \cos(10t)\cos(t)\big) \\ & + r\big(-10\operatorname{sen}(10t)\operatorname{sen}(t) + \cos(10t)\cos(t), -10\operatorname{sen}(10t)\cos(t) - \cos(10t)\operatorname{sen}(t)\big). \end{aligned}$$

Para $t = 0$, *segue que*

$$g(r) = \big(\cos(0)\,\mathrm{sen}(0), \cos(0)\cos(0)\big) + r\big(-10\,\mathrm{sen}(0)\,\mathrm{sen}(0) + \cos(0)\cos(0), -10\,\mathrm{sen}(0)\cos(0) - \cos(0)\,\mathrm{sen}(0)\big).$$

Como $\mathrm{sen}(0) = 0$ *e* $\cos(0) = 1$, *temos*

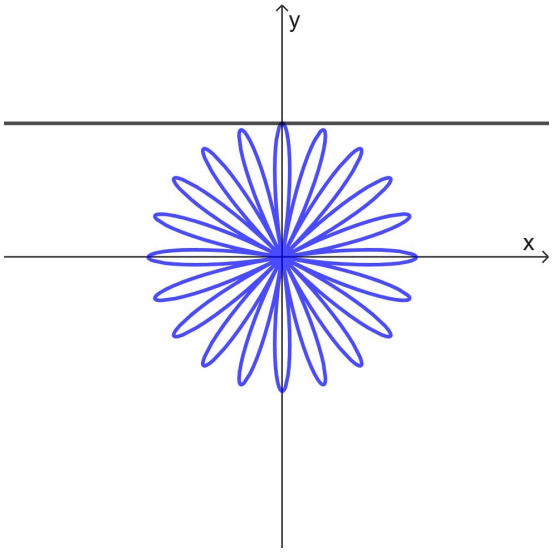
$$g(r) = (0,1) + r(1,0).$$

Logo, a reta tangente é dada por

$$g(r) = (r,1),\ r \in \mathbb{R},$$

conforme ilustrado na Figura 2.28.

Figura 2.28: Reta Tangente à Rosácea



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

2.4 Reparametrização

Vimos no Exemplo 2.6, que duas curvas definidas por funções diferentes podem ter o mesmo traço. Assim, passamos a estudar como, dada uma curva regular α, é possível obter outras curvas regulares que descrevam exatamente o mesmo traço. Em outras palavras, veremos que, por meio de uma reparametrização (ou mudança de parâmetro) de uma curva, podemos obter novas curvas com o mesmo traço geométrico. Com essas informações, apresentamos a definição a seguir.

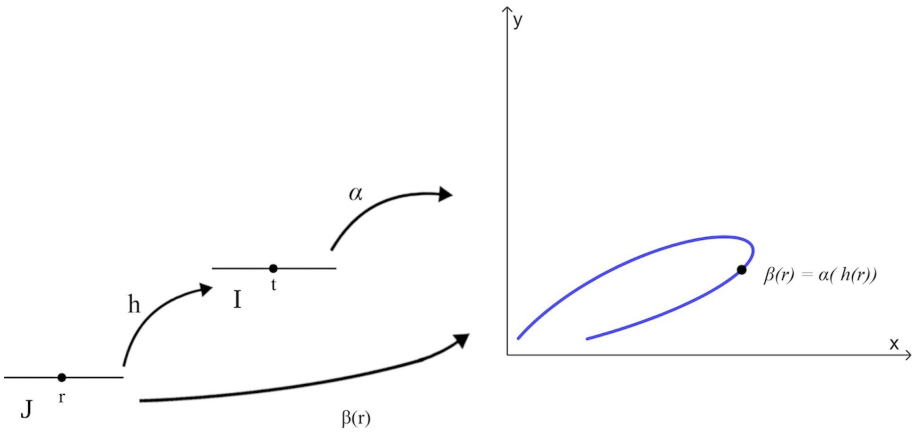
Definição 2.16 (Reparametrização)**.** *Sejam* I *e* J *intervalos abertos de* $\mathbb{R}$, $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *uma curva regular e* $h : J \to I$ *uma função de classe* C^∞, *cuja derivada de primeira ordem é não nula em todo ponto de* J *e tal que* $h(J) = I$. *Então, a função composta*

$$\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^2$$

é chamada reparametrização de α por meio da função h, e a função h é dita uma mudança de parâmetro.

Observação 2.3. *É possível provar que, na definição anterior, β é uma curva regular e possui o mesmo traço que a curva α, contudo não provaremos este fato.*

Figura 2.29: Mudança de Parâmetro



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Vimos na Definição 2.16 que a partir de uma curva regular α, pode-se obter uma nova curva β por meio de uma reparametrização, na qual a função h desempenha um papel fundamental. Como ilustrado na Figura 2.29, a mudança de parâmetro ocorre da seguinte forma: temos a curva α definida em um intervalo I, com parâmetro t, e definimos uma função h em um intervalo J, com parâmetro r, tal que $h(J) = I$.

A partir desse ponto, vamos nos concentrar no estudo de reparametrizações em que a função h é uma função real de variável real monótona e, portanto, $h'(r) \neq 0$, para todo $r \in J$. Nesse caso, se α for uma curva regular definida em I, sua reparametrização β também será regular em J. De fato, pela regra da cadeia, temos

$$\beta'(r) = \alpha'\big(h(r)\big) \cdot h'(r).$$

Como α é regular, temos $\alpha'(h(r)) \neq (0,0)$, e como $h'(r) \neq 0$, o produto nunca se anula. Portanto, a regularidade da curva é preservada pela reparametrização.

Um aspecto fundamental relacionado às reparametrizações é a orientação de uma curva regular α, que corresponde ao sentido de percurso do seu traço. Assim, se β é uma reparametrização de α por meio da função h, então: se h é estritamente crescente, a curva β preserva a orientação da curva α; se h é estritamente decrescente, a curva β é uma reparametrização negativa de α, isto é, as curvas possuem orientações opostas.

A partir desse ponto de vista, calcularemos a reparametrização de algumas curvas e mostraremos os vetores tangentes de cada uma delas, de modo que possamos obser-

var a diferença entre os vetores tangentes das curvas originais e das curvas que foram reparametrizadas, conforme os exemplos apresentados a seguir.

Exemplo 2.16. *Considere a curva regular α dada por*

$$\alpha(t) = \big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big),\ t \in [0, 2\pi].$$

Seja a função de reparametrização

$$h(r) = 2\pi r,\ r \in [0, 1].$$

A reparametrização de α por meio de h é a curva β, definida por

$$\beta(r) = \alpha\big(h(r)\big).$$

Substituindo $h(r)$, obtemos

$$\beta(r) = \alpha(2\pi r) = \big(\cos(2\pi r),\ \operatorname{sen}(2\pi r)\big).$$

Observamos que $h([0, 1]) = [0, 2\pi]$, pois

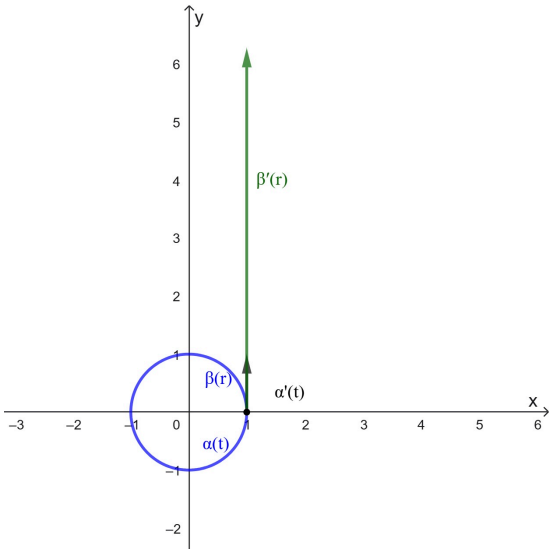
$$h(0) = 0, \quad h(1) = 2\pi \quad e \quad h((0, 1)) = (0, 2\pi).$$

Além disso, a função h é estritamente crescente, uma vez que

$$h'(r) = 2\pi > 0,\ \forall\ r \in [0, 1].$$

Portanto, a curva β preserva a orientação da curva α, bem como possuem o mesmo traço, conforme ilustra a Figura 2.30.

Figura 2.30: Reparametrização da Curva



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Observe que, no Exemplo 2.16, o vetor tangente da curva α é dado por $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$. Por sua vez, nota-se que o vetor tangente da curva β é dado por $\beta'(r) = (-2\pi \operatorname{sen}(2\pi r), 2\pi \cos(2\pi r))$. Para o valor do parâmetro $t = r = 0$, a curva α passa pelo ponto $\alpha(0) = (1, 0)$, e o vetor tangente correspondente é $\alpha'(0) = (0, 1)$. Por sua vez, a curva β passa pelo ponto $\beta(0) = (1, 0)$, e o vetor tangente correspondente é $\beta'(0) = (0, 2\pi)$.

Portanto, os vetores tangentes de α e β possuem a mesma direção e o mesmo sentido, como ilustra a Figura 2.30. No entanto, o fator 2π presente no vetor tangente de β indica uma velocidade maior ao longo da curva. Assim, temos um caso em que a reparametrização por meio da função h preserva a orientação da curva, diferentemente do exemplo apresentado a seguir.

Exemplo 2.17. *Considere a curva regular α dada por*

$$\alpha(t) = \big(t^5 - 2t, t^4 - 2\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

Seja a função de reparametrização

$$h(r) = -2r,\ r \in \mathbb{R}.$$

A reparametrização de α por meio de h é a curva β, definida por

$$\beta(r) = \alpha\big(h(r)\big).$$

Substituindo $h(r)$, obtemos

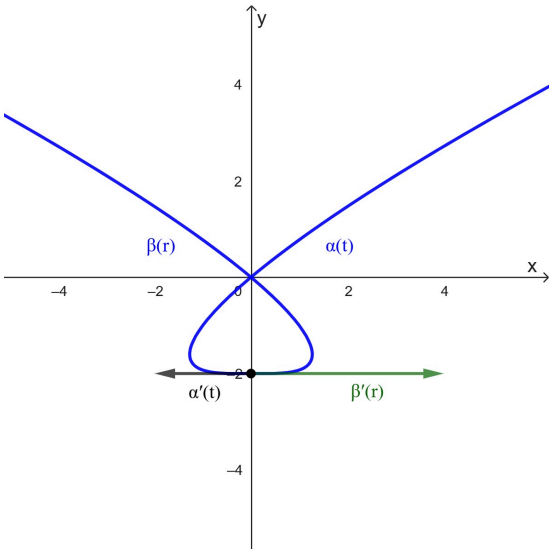
$$\beta(r) = \alpha(-2r) = (-32r^5 + 4r, 16r^4 - 2).$$

Observamos que $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, pois o gráfico é uma reta e o domínio é $\mathbb{R}$. Além disso, a função h é estritamente decrescente, uma vez que

$$h'(r) = -2 < 0,\ \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a curva β possui orientação oposta à curva α, conforme ilustrado para $t = r = 0$ na Figura 2.31

Figura 2.31: Orientações das Curvas



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Observe que, no Exemplo 2.17, o vetor tangente da curva α é dado por $\alpha'(t) = \big(5t^4 - 2, 4t^3\big)$, e o vetor tangente da curva β é dado por $\beta'(r) = \big(-160r^4 + 4, 64r^3\big)$. Para o valor do parâmetro $t = r = 0$, a curva α passa pelo ponto $\alpha(0) = (0, -2)$, e o vetor tangente correspondente é $\alpha'(0) = (-2, 0)$. Por sua vez, a curva β passa pelo ponto $\beta(0) = (0, -2)$, e o vetor tangente correspondente é $\beta'(0) = (4, 0)$. Portanto, os vetores tangentes de α e β possuem a mesma direção e sentidos opostos, como ilustra a Figura 2.31. Assim, temos um caso em que a reparametrização por meio da função h produz curvas com orientações opostas.

Como uma parametrização $h : J \to I$ é sempre uma função estritamente crescente ou decrescente, logo h é uma função bijetiva. Assim, se β é uma reparametrização de α por meio da função h, isto é, $\beta(r) = \alpha\big(h(r)\big)$, então existe a função inversa $h^{-1} : I \to J$, e vale que

$$\alpha(t) = \beta\big(h^{-1}(t)\big).$$

Desse modo, a curva α é uma reparametrização da curva β por meio da função inversa h^{-1}.

2.5 Comprimento de Arco

Nesta seção, será introduzido o conceito de comprimento de arco. Alguns resultados e conceitos da Análise e do Cálculo não serão detalhados.

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular definida em um intervalo fechado $I = [u, v]$. Subdividindo o intervalo I em várias partições temos: $u = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = v$. Unindo cada ponto da partição $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n)$ por segmentos, obtemos

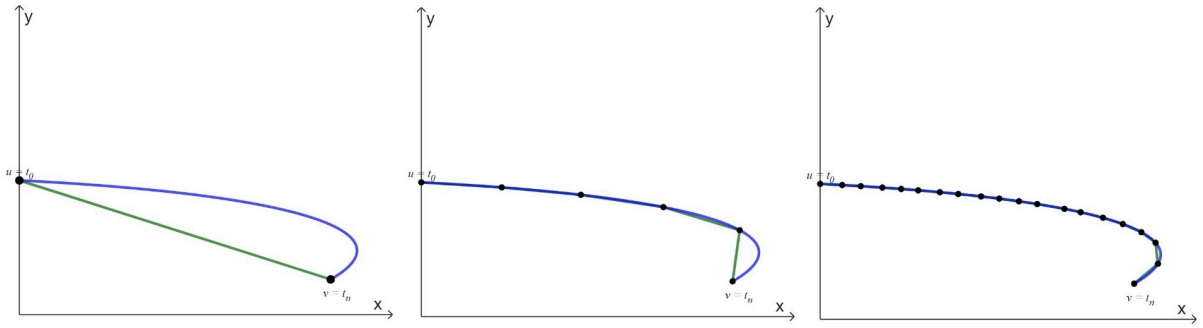
uma linha poligonal inscrita na curva, formada pelos segmentos que ligam os pontos entre $\alpha(u)$ e $\alpha(v)$, conforme apresenta a Figura 2.32.

Assim, o comprimento de arco da curva entre os pontos $\alpha(u)$ e $\alpha(v)$ pode ser entendido como a aproximação da soma dos comprimentos dos segmentos da linha poligonal inscrita. Quanto maior for o número de subdivisões do intervalo I, melhor será a aproximação do comprimento da curva estudada.

Portanto, sendo α uma curva parametrizada regular, o comprimento de arco da curva entre t_0 e t_1 é definido como o limite superior dos comprimentos das linhas poligonais inscritas na curva, o qual é dado pela integral

$$\int_{t_0}^{t_1} ||\alpha'(t)||\, dt.$$

Figura 2.32: Partições do Intervalo I



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Observação 2.4. *Definimos o comprimento de arco como uma função que associa a cada parâmetro t o comprimento do arco da curva percorrido desde um parâmetro inicial t_0 até t.*

Com base nessas informações, apresentamos a seguir a definição de comprimento de arco de uma curva parametrizada regular.

Definição 2.17 (Comprimento de Arco)**.** *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular de classe C^1. A aplicação $s : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\gamma)||\, d\gamma = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\big(x'(\gamma)\big)^2 + \big(y'(\gamma)\big)^2}\, d\gamma,\ t_0 \in I,$$

é denominada função comprimento de arco.

Com base na definição anterior, analisaremos a seguir o comprimento de arco de alguns exemplos de curvas.

Exemplo 2.18. *Considere a curva parametrizada regular α definida por*

$$\alpha(t) = \big(\cos(t), \operatorname{sen}(t)\big),\ t \in [0, 2\pi].$$

Seja o vetor tangente

$$\alpha'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)).$$

Calculando a velocidade escalar da curva α, temos

$$||\alpha'(t)|| = \sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2 + \cos^2(t)} = 1.$$

Portanto, o comprimento de arco da curva é dado por

$$s(2\pi) = \int_0^{2\pi} ||\alpha'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} dt.$$

Calculando a integral,

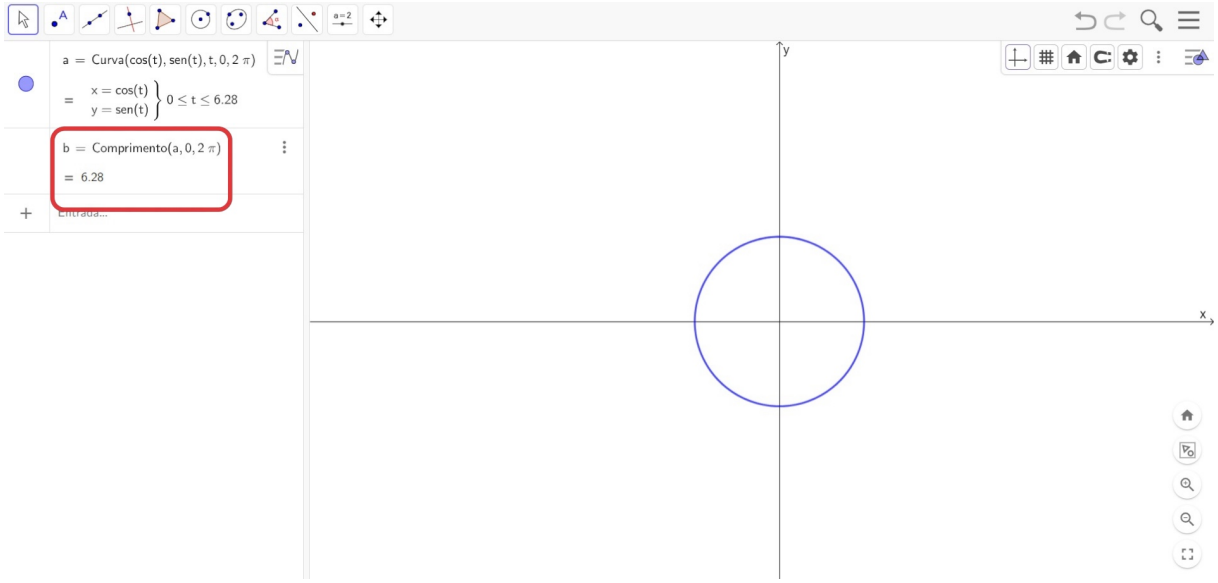
$$s(2\pi) = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Logo, o comprimento de arco da curva é

$$s = 2\pi \cong 6,28$$

conforme ilustrado na Figura 2.33.

Figura 2.33: Comprimento da Circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Exemplo 2.19. *Considere a curva parametrizada regular α definida por*

$$\alpha(t) = \big(e^t \cos(t),\, e^t \operatorname{sen}(t)\big),\ t \in [0, 2\pi],$$

cujo traço corresponde a uma espiral logarítmica.
Seja o vetor tangente

$$\alpha'(t) = \big(e^t \cos(t) - e^t \operatorname{sen}(t), e^t \operatorname{sen}(t) + e^t \cos(t)\big).$$

Calculando a velocidade escalar da curva α, temos

$$||\alpha'(t)|| = \sqrt{\big(e^t\cos(t) - e^t\,\mathrm{sen}(t)\big)^2 + \big(e^t\,\mathrm{sen}(t) + e^t\cos(t)\big)^2}.$$

Colocando e^t em evidência,

$$||\alpha'(t)|| = e^t\sqrt{\big(\cos(t) - \,\mathrm{sen}(t)\big)^2 + \big(\mathrm{sen}(t) + \cos(t)\big)^2}.$$

Desenvolvendo,

$$||\alpha'(t)|| = e^t\sqrt{\cos^2(t) - 2\cos(t)\,\mathrm{sen}(t) + \,\mathrm{sen}^2(t) + \,\mathrm{sen}^2(t) + 2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) + \cos^2(t)}.$$

Logo,

$$||\alpha'(t)|| = e^t\sqrt{2\big(\cos^2(t) + \,\mathrm{sen}^2(t)\big)} = e^t\sqrt{2}.$$

Portanto, o comprimento de arco da curva é dado por

$$s(2\pi) = \int_0^{2\pi} ||\alpha'(t)||\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,e^t\,dt.$$

Calculando a integral,

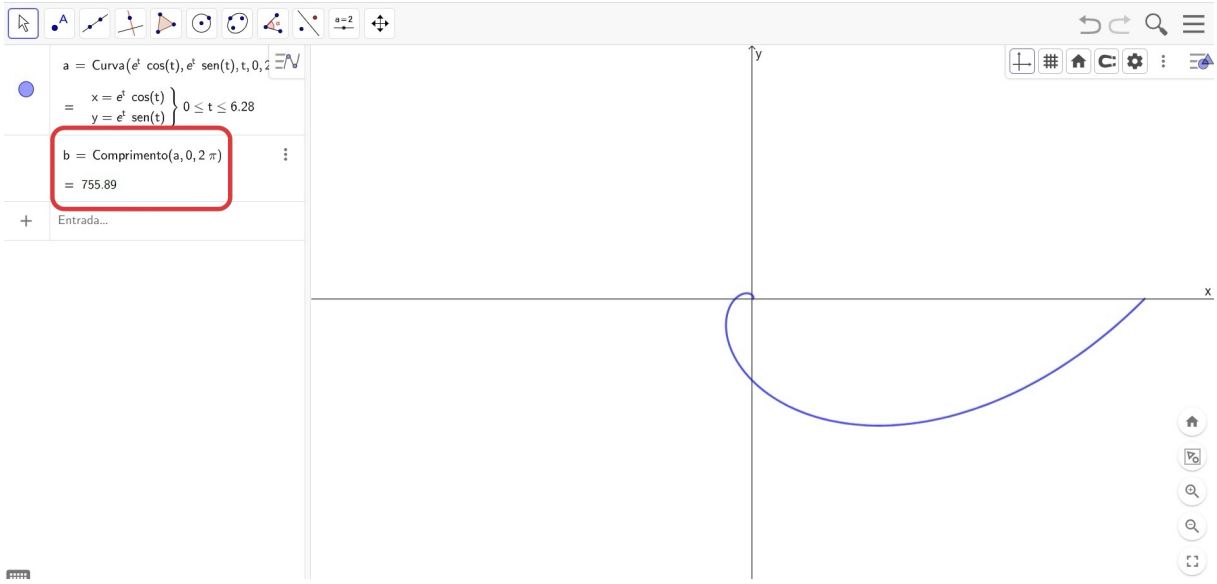
$$s(2\pi) = \sqrt{2}\,e^t\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\big(e^{2\pi} - 1\big).$$

Logo, o comprimento de arco da curva é

$$s = \sqrt{2}\big(e^{2\pi} - 1\big) \cong 755.89$$

conforme ilustrado na Figura 2.34.

Figura 2.34: Comprimento da Espiral Logarítmica



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Exemplo 2.20. *Vimos, no Exemplo 2.13, a velocidade escalar da curva parametrizada diferenciável α definida por*

$$\alpha(t) = \big(t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t)\big), \ t \in [0, 2\pi].$$

Calculando a velocidade escalar da curva α, obtemos

$$||\alpha'(t)|| = 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

Portanto, o comprimento de arco da curva é dado por

$$s(2\pi) = \int_0^{2\pi} ||\alpha'(t)|| \, dt = \int_0^{2\pi} 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt.$$

Calculando a integral, obtemos

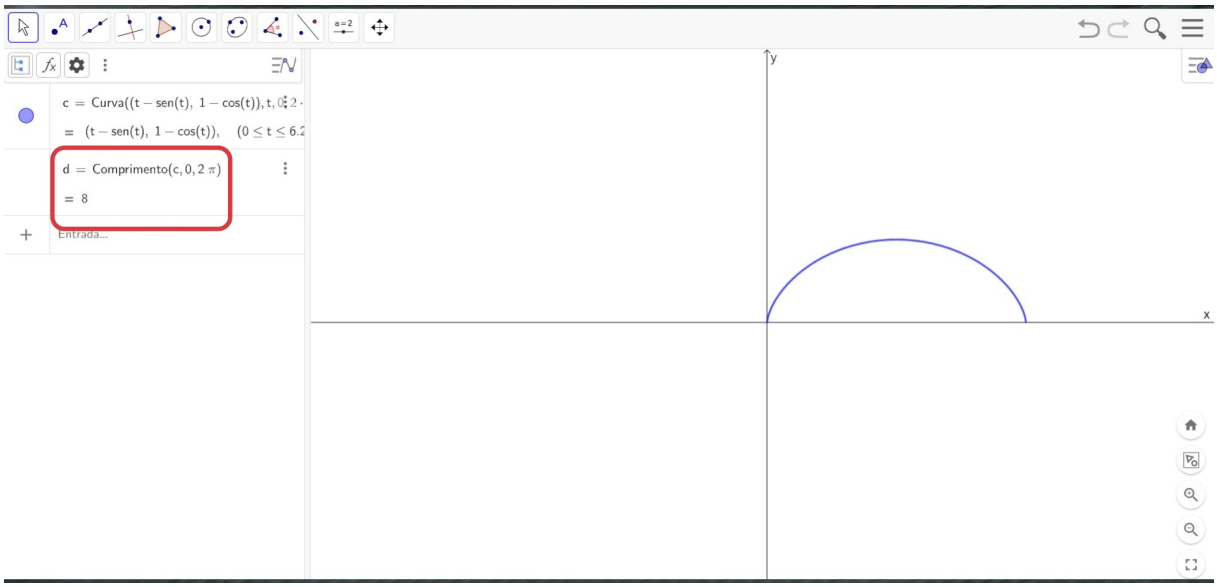
$$s(2\pi) = 2\int_0^{2\pi} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 4\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt.$$

Esta última passagem se deve ao fato de que, por simetria, a área, em módulo, da curva entre 0 e 2π é o dobro da área, em módulo, da curva entre 0 e π. Logo,

$$s(2\pi) = 4\Big(-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big)\Big|_0^{\pi} = -8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8\cos(0) = 8,$$

que é surpreeendentemente um número inteiro, conforme verificado na Figura 2.35.

Figura 2.35: Comprimento de um Arco de Cicloide



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Definição 2.18 (Parametrização pelo Comprimento de Arco)**.** *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para quaisquer $t_0, t_1 \in I$, com $t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco da curva α entre t_0 e t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é,*

$$\int_{t_0}^{t_1} ||\alpha'(t)|| \, dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 2.1. *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $||\alpha'(t)|| = 1$, para todo $t \in I$.*

Demonstração. Suponha que α esteja parametrizada pelo comprimento de arco e fixe $t_0 \in I$. Considere a função comprimento de arco $s : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\gamma)|| \, d\gamma.$$

Como α está parametrizada pelo comprimento de arco, o comprimento do arco entre t_0 e t é igual a $|t - t_0|$. Logo, $s(t) = t - t_0$, se $t \geq t_0$, e $s(t) = -(t_0 - t) = t - t_0$, se $t \leq t_0$. Portanto, para todo $t \in I$, temos $s(t) = t - t_0$. Derivando ambos os lados em relação a t, obtemos $s'(t) = 1$. Por outro lado, pela definição da função comprimento de arco,

$$s'(t) = ||\alpha'(t)||.$$

Assim, $||\alpha'(t)|| = 1$, para todo $t \in I$.

Reciprocamente, se $||\alpha'(t)|| = 1$ para todo $t \in I$, então

$$\int_{t_0}^{t_1} ||\alpha'(t)|| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t_1 - t_0,$$

mostrando que α está parametrizada pelo comprimento de arco. □

Note que a curva do Exemplo 2.18 é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, uma vez que a velocidade escalar satisfaz $||\alpha'(t)|| = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. A seguir, mostraremos que toda curva regular α admite uma reparametrização β tal que β esteja parametrizada pelo comprimento de arco.

Proposição 2.2. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular, onde I é um intervalo aberto. Denotemos por $s : I \to s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 \in I$. Então, a função s admite inversa $h : J \to I$, definida no intervalo aberto $J = s(I)$. Além disso, a curva $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α e está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Como α é uma curva regular, temos

$$s'(t) = ||\alpha'(t)|| > 0,$$

isto é, s é uma função estritamente crescente. Logo, existe a função inversa de s, $h : J \to I$, onde $J = s(I)$. Como, para todo $t \in I$, vale $h(s(t)) = t$, derivando ambos os lados em relação a t, obtemos $h'(s(t))\, s'(t) = 1$. Assim,

$$h'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{||\alpha'(t)||} > 0.$$

Concluímos que a curva $\beta(s(t)) = \alpha \circ h(s(t)),\ s \in J$, é uma reparametrização de α. Derivando β, temos $\beta'(s(t)) = \alpha'(h(s(t)))\, h'(s(t))$, e consequentemente,

$$||\beta'(s(t))|| = ||\alpha'(h(s(t)))||\ h'(s(t)) = ||\alpha'(t)|| \cdot \frac{1}{||\alpha'(t)||} = 1.$$

Portanto, pela Proposição 2.1, a curva β está parametrizada pelo comprimento de arco. □

Consideremos a curva $\alpha(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \operatorname{sen}(t)\big),\ t \in \mathbb{R}$, estudada no Exemplo 2.19. Verificamos que a velocidade escalar da curva é $||\alpha'(t)|| = e^t\sqrt{2}$. Assim, a função comprimento de arco da curva α, a partir de $t = 0$, é dada por

$$s(t) = \sqrt{2}\,(e^t - 1).$$

A função inversa de s é dada por

$$t = h(s) = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right).$$

Portanto, a curva

$$\beta(s) = \alpha\big(h(s)\big) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right),\ \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)\right)$$

é uma reparametrização da curva α pelo comprimento de arco.

2.6 Referencial de Frenet e Curvatura

Nesta seção, estudaremos o Referencial de Frenet e a curvatura no plano. Tais conceitos permitem analisar geometricamente o comportamento local de uma curva regular, descrevendo a variação da direção do vetor tangente ao longo do seu traço.

Considere uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s)),\ \forall\ s \in I$. Para cada $s \in I$, o vetor tangente é dado por $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$, o qual denotamos por $t(s)$. Como a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se que $||\alpha'(s)|| = 1, \forall\, s \in I$, isto é, o vetor tangente $t(s)$ é sempre um vetor unitário. Dessa forma, podemos escrever

$$t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)).$$

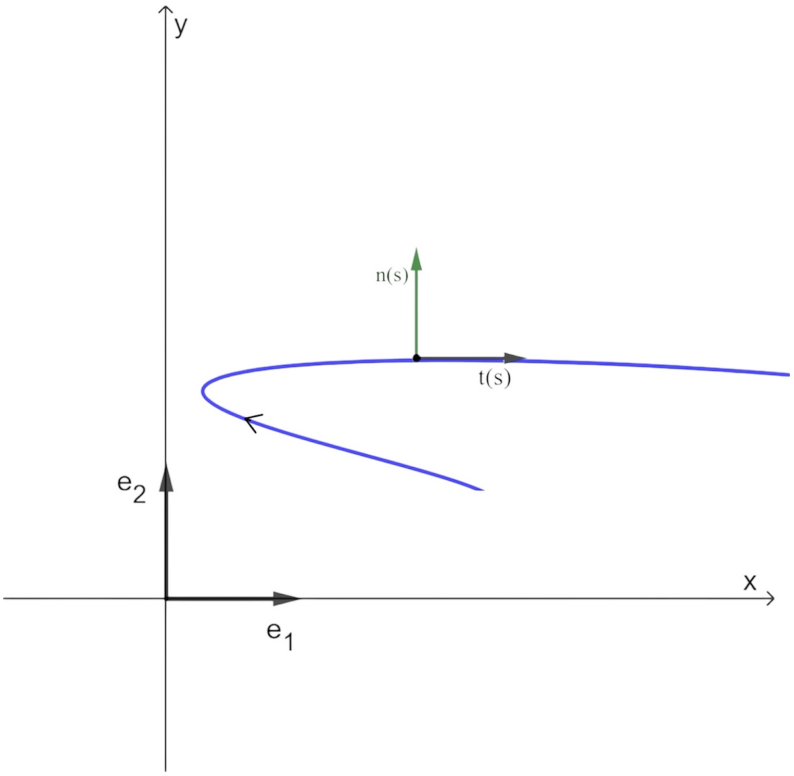
Observe que podemos construir, ao longo da curva α, um vetor normal $n(s)$, definido como um vetor unitário e ortogonal ao vetor tangente $t(s)$. Em $\mathbb{R}^2$, um vetor unitário ortogonal a $t(s) = (x'(s), y'(s))$, com a mesma orientação da base canônica $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, é dado por

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Dessa forma, os vetores $t(s)$ e $n(s)$ constituem o Referencial de Frenet da curva α em s. Assim, apresentamos a seguinte definição:

Definição 2.19 (Referencial de Frenet)**.** *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A base $\{t(s), n(s)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é chamada referencial de Frenet de α.*

Figura 2.36: Referencial de Frenet



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Visto que $||t(s)|| = 1$, então

$$\langle t(s), t(s)\rangle \;=\; ||t(s)|| \cdot ||t(s)|| \cdot \cos(t(s), t(s)) \;=\; 1 \cdot 1 \cdot 1 \;=\; 1,\ \forall\, s \in I,$$

já que o ângulo entre $t(s)$ e ele mesmo é nulo. A primeira igualdade acima é um resultado de Geometria Analítica. Derivando ambos os lados em relação a s, observando que o produto interno é simétrico, e que $\langle \alpha(s), \beta(s)\rangle' \;=\; \langle \alpha'(s), \beta(s)\rangle + \langle \alpha(s), \beta'(s)\rangle$, $\forall\, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ diferenciável, obtemos

$$\langle t'(s), t(s)\rangle + \langle t(s), t'(s)\rangle \;=\; 0$$

$$2\langle t'(s), t(s)\rangle \;=\; 0$$

$$\langle t'(s), t(s)\rangle \;=\; 0.$$

Isso mostra que $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$. Como $t(s)$ e $n(s)$ são ortogonais, segue que $t'(s)$ é paralelo a $n(s)$. Portanto, existe uma função $k : I \to \mathbb{R}$, tal que

$$t'(s) \;=\; k(s)\, n(s), \forall\, s \in I.$$

Como $t'(s) = k(s)\,n(s)$ e $\{t(s), n(s)\}$ é uma base ortonormal, temos

$$k(s) \;=\; \langle t'(s), n(s)\rangle.$$

Mas $t(s) = (x'(s), y'(s))$, logo

$$t'(s) \;=\; (x''(s), y''(s)).$$

Além disso,

$$n(s) \;=\; (-y'(s), x'(s)).$$

Portanto,

$$k(s) \;=\; \big\langle (x''(s), y''(s)), (-y'(s), x'(s))\big\rangle \;=\; -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

Vale salientar que a função k desempenha um papel fundamental no estudo das curvas em Geometria Diferencial e recebe um nome específico, que definimos a seguir.

Definição 2.20 (Curvatura)**.** *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A função $k : I \to \mathbb{R}$, definida por*

$$t'(s) \;=\; k(s)\,n(s),$$

para todo $s \in I$, é denominada curvatura da curva α em $s \in I$.

De forma análoga, como o vetor $n(s)$ é unitário, então $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e é, portanto, paralelo a $t(s)$. Assim, temos que

$$\langle n'(s), t(s)\rangle \;=\; \big\langle (-y''(s), x''(s)), (x'(s), y'(s))\big\rangle \;=\; -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s) = -k(s).$$

Portanto

$$n'(s) \;=\; -k(s)t(s).$$

Dessa forma, as equações

$$\begin{cases} t'(s) \;=\; k(s)\,n(s) \\ n'(s) \;=\; -k(s)\,t(s) \end{cases}$$

são denominadas Fórmulas de Frenet de uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco. Calcularemos a seguir a curvatura de alguns exemplos de curvas.

Exemplo 2.21. *Considere a curva α parametrizada pelo comprimento de arco dada por*

$$\alpha(s) \;=\; \big(2 + \cos(s),\, 2 + \operatorname{sen}(s)\big),\;\; s \in \mathbb{R},$$

cujo traço é uma circunferência de centro $(2, 2)$ e raio unitário. O referencial de Frenet é dado por

$$t(s) \;=\; \big(x'(s), y'(s)\big) \;=\; \big(-\operatorname{sen}(s), \cos(s)\big),$$

e

$$n(s) = \big(-y'(s), x'(s)\big) = \big(-\cos(s), -\operatorname{sen}(s)\big).$$

Derivando o vetor tangente, obtemos

$$t'(s) = \big(-\cos(s), -\operatorname{sen}(s)\big).$$

Logo,

$$k(s) = \langle t'(s), n(s)\rangle = \big\langle(-\cos(s), -\operatorname{sen}(s)), (-\cos(s), -\operatorname{sen}(s))\big\rangle = \cos^2(s) + \operatorname{sen}^2(s).$$

Como

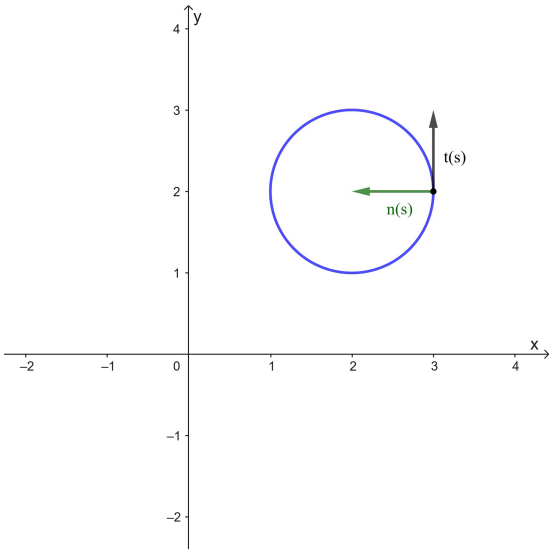
$$\cos^2(s) + \operatorname{sen}^2(s) = 1,$$

segue que

$$k(s) = 1.$$

Portanto, a curvatura da curva é constante e igual a 1*, conforme ilustrado na Figura 2.37:*

Figura 2.37: Curvatura de $\alpha(s)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Conforme visto no Exemplo 2.25, o vetor tangente da curva $\alpha(s)$ é dado por $t(s) = \big(-\operatorname{sen}(s), \cos(s)\big)$, e o vetor normal é dado por $n(s) = \big(-\cos(s), -\operatorname{sen}(s)\big)$. Para o valor do parâmetro $s = 0$, a curva $\alpha(s)$ passa pelo ponto $\alpha(0) = (3, 2)$, o vetor tangente correspondente é $t(0) = (0, 1)$, e o vetor normal correspondente é $n(0) = (-1, 0)$, conforme visto na Figura 2.37. Portanto, os vetores $t(s)$ e $n(s)$ constituem o referencial de Frenet associado à curva $\alpha(s)$. A partir desse exemplo, verificamos explicitamente as Fórmulas de Frenet.

Exemplo 2.22. *Dado o vetor tangente e o vetor normal obtidos no Exemplo 2.25, temos*

$$t(s) = \big(-\operatorname{sen}(s), \cos(s)\big)$$

e

$$n(s) = \big(-\cos(s), -\operatorname{sen}(s)\big).$$

Como já foi calculado anteriormente, a curvatura da curva é

$$k(s) = 1.$$

Assim, pelas equações de Frenet para curvas planas,

$$t'(s) = k(s)\, n(s),$$

temos

$$t'(s) = 1 \cdot \big(-\cos(s), -\operatorname{sen}(s)\big) = \big(-\cos(s), -\operatorname{sen}(s)\big).$$

Além disso,

$$n'(s) = -k(s)\, t(s),$$

logo,

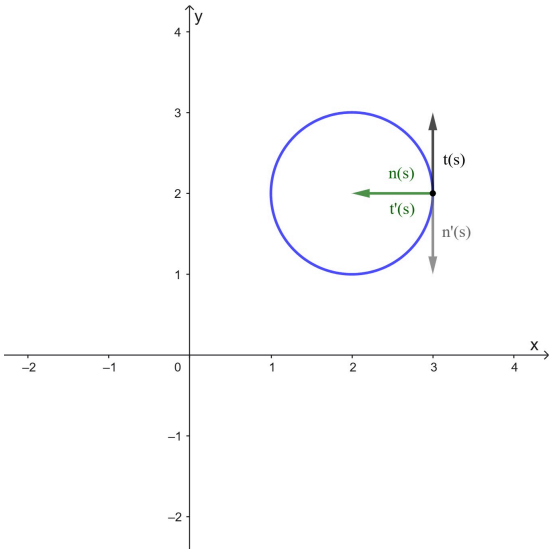
$$n'(s) = -1 \cdot \big(-\operatorname{sen}(s), \cos(s)\big) = \big(\operatorname{sen}(s), -\cos(s)\big).$$

Portanto, as Fórmulas de Frenet para essa curva são dadas por

$$\begin{cases} t'(s) = \big(-\cos(s), -\operatorname{sen}(s)\big) \\ n'(s) = \big(\operatorname{sen}(s), -\cos(s)\big), \end{cases}$$

conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 2.38: Fórmulas de Frenet da curva $\alpha(s)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Nos exemplos anteriores, determinamos a curvatura de circunferências parametrizadas pelo comprimento de arco. A seguir, apresentaremos uma generalização desse resultado para uma circunferência qualquer.

Exemplo 2.23. *Considere a curva* $\alpha(t) = (a + r\cos(t),\, b + r\,\mathrm{sen}(t)),\ t \in \mathbb{R},\ r > 0$, *cujo traço corresponde a uma circunferência de centro* (a, b) *e raio* r. *Calculando a velocidade escalar da curva, temos:*

$$\begin{aligned} ||\alpha'(t)|| &= \sqrt{(-r\,\mathrm{sen}(t))^2 + (r\cos(t))^2} \\ &= \sqrt{r^2\,\mathrm{sen}^2(t) + r^2\cos^2(t)} \\ &= \sqrt{r^2(\,\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t))} \\ &= \sqrt{r^2} = r. \end{aligned}$$

Como a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco, definimos a seguinte reparametrização de α*:*

$$\beta(s) = \Big(a + r\cos\Big(\frac{s}{r}\Big),\, b + r\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big),$$

cujo traço coincide com o da curva original. Calculando a velocidade escalar da curva β*, obtemos:*

$$\beta'(s) = \Big(-\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{r}\Big), \cos\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big).$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||\beta'(s)|| &= \sqrt{\Big(-\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big)^2 + \Big(\cos\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big)^2} \\ &= \sqrt{\mathrm{sen}^2\Big(\frac{s}{r}\Big) + \cos^2\Big(\frac{s}{r}\Big)} = 1. \end{aligned}$$

Logo, a curva β *está parametrizada pelo comprimento de arco. Vamos determinar o Referencial de Frenet associado à curva* β*. Temos:*

$$t(s) = \beta'(s) = \Big(-\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{r}\Big), \cos\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big).$$

Derivando o vetor tangente, obtemos:

$$t'(s) = \Big(-\frac{1}{r}\cos\Big(\frac{s}{r}\Big), -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big).$$

O vetor normal unitário é dado por

$$n(s) = \Big(-\cos\Big(\frac{s}{r}\Big), -\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big).$$

Calculando a curvatura da curva β*, temos:*

$$k(s) = \big\langle t'(s), n(s)\big\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} k(s) &= \left\langle \Big(-\frac{1}{r}\cos\Big(\frac{s}{r}\Big), -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big), \Big(-\cos\Big(\frac{s}{r}\Big), -\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big)\right\rangle \\ &= \frac{1}{r}\cos^2\Big(\frac{s}{r}\Big) + \frac{1}{r}\,\mathrm{sen}^2\Big(\frac{s}{r}\Big) \\ &= \frac{1}{r}\Big(\cos^2\Big(\frac{s}{r}\Big) + \,\mathrm{sen}^2\Big(\frac{s}{r}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura da circunferência de raio r é constante e igual a

$$k(s) = \frac{1}{r}.$$

Observe que a curvatura de uma curva num ponto mede o quanto esta curva se afasta da reta tangente neste mesmo ponto. No exemplo anterior, verificamos que a circunferência possui curvatura constante, inversamente proporcional ao seu raio, em todos os seus pontos. No caso de uma reta, a curvatura é nula, uma vez que não há variação na direção do vetor tangente, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.24. *Considere a curva regular parametrizada pelo comprimento de arco dada por*

$$\alpha(s) = (x_0 + as, y_0 + bs),\ s \in \mathbb{R},$$

com

$$a^2 + b^2 = 1,$$

cujo traço corresponde a uma reta. Vamos determinar o Referencial de Frenet associado à curva α. Temos:

$$t(s) = \alpha'(s) = (a, b).$$

Derivando o vetor tangente, obtemos:

$$t'(s) = (0, 0).$$

O vetor normal unitário é dado por

$$n(s) = (-b, a).$$

Calculando a curvatura da curva α, temos:

$$k(s) = \big\langle t'(s), n(s)\big\rangle = \big\langle (0,0), (-b,a)\big\rangle = 0.$$

Portanto, a curvatura da reta é nula, isto é $k(s) = 0$. Reciprocamente, suponha que $k(s) = 0$. Substituindo na equação de Frenet,

$$t'(s) = k(s)n(s),$$

obtemos

$$t'(s) = 0 \cdot n(s) = (0,0).$$

Portanto, o vetor tangente $t(s)$ é constante ao longo de toda a curva. Assim, existe um vetor constante

$$v = (a,b)$$

tal que

$$t(s) = v.$$

Como a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, segue que

$$||t(s)|| = 1,$$

isto é,

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Sabe-se que

$$\alpha'(s) = t(s) = (a,b).$$

Integrando ambos os lados da igualdade em relação a s, obtemos

$$\alpha(s) = \left(\int a\, ds, \int b\, ds \right) = (as + x_0, bs + y_0),$$

em que (x_0, y_0) representa um ponto da curva. Portanto, o traço de α está contido em uma reta.

Até o momento, a curvatura foi estudada para curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Porém, isso não é necessário em todos os casos. A seguir, apresentaremos um resultado para curvas não parametrizadas pelo comprimento de arco.

Proposição 2.3. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular dada por $\alpha(r) = (x(r), y(r))$, $r \in I$. Então, o vetor tangente unitário associado à curva α é dado por*

$$t(r) = \frac{\big(x'(r), y'(r)\big)}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}.$$

O vetor normal unitário é dado por

$$n(r) = \frac{\big(-y'(r), x'(r)\big)}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}.$$

Além disso, a curvatura da curva α é dada por

$$k(r) = \frac{x'(r)y''(r) - x''(r)y'(r)}{\Big(x'(r)^2 + y'(r)^2\Big)^{3/2}}.$$

Demonstração. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular dada por

$$\alpha(r) \,=\, (x(r), y(r)), \quad r \in I.$$

Considere $\beta(s)$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco s, de modo que

$$\beta(s(r)) \,=\, \alpha(r).$$

Derivando ambos os lados em relação a r, pela regra da cadeia, obtemos

$$\beta'(s(r))\, s'(r) \,=\, \alpha'(r).$$

Como

$$\beta'(s(r)) \,=\, t(s(r)),$$

segue que

$$t(s(r))\, s'(r) \,=\, \alpha'(r).$$

Além disso, pela definição de comprimento de arco,

$$s'(r) \,=\, ||\alpha'(r)||.$$

Portanto,

$$t(s(r)) \,=\, \frac{\alpha'(r)}{||\alpha'(r)||} \,=\, \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}.$$

Pela definição do vetor normal unitário,

$$n(s(r)) \,=\, \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}.$$

Agora, derivando novamente a relação

$$\alpha'(r) \,=\, \beta'(s(r))\, s'(r),$$

obtemos

$$\alpha''(r) \,=\, \beta''(s(r))(s'(r))^2 + \beta'(s(r))\, s''(r).$$

Tomando o produto interno com $n(s(r))$, segue que

$$\big\langle \alpha''(r), n(s(r)) \big\rangle \,=\, (s'(r))^2 \big\langle \beta''(s(r)), n(s(r)) \big\rangle + s''(r) \big\langle \beta'(s(r)) \,, n(s(r)) \big\rangle.$$

Como

$$\beta'(s(r)) \,=\, t(s(r))$$

e $t(s(r))$ é ortogonal a $n(s(r))$, temos

$$\big\langle t(s(r)), n(s(r)) \big\rangle \,=\, 0.$$

Logo,

$$\big\langle \alpha''(r), n(s(r)) \big\rangle \;=\; (s'(r))^2 \big\langle \beta''(s(r)), n(s(r)) \big\rangle.$$

Pela definição de curvatura,

$$k(s(r)) \;=\; \big\langle t'(s(r)), n(s(r)) \big\rangle \;=\; \big\langle \beta''(s(r)), n(s(r)) \big\rangle.$$

Assim,

$$\big\langle \alpha''(r), n(s(r)) \big\rangle \;=\; ||\alpha'(r)||^2 \, k(s(r)).$$

Portanto,

$$k(s(r)) \;=\; \frac{\big\langle \alpha''(r), n(s(r)) \big\rangle}{||\alpha'(r)||^2}.$$

Substituindo as expressões de $\alpha''(r)$ e $n(s(r))$, obtemos

$$k(r) \;=\; \frac{\big\langle (x''(r), y''(r)), (-y'(r), x'(r)) \big\rangle}{\big(x'(r)^2 + y'(r)^2\big)^{3/2}}.$$

Efetuando o produto interno,

$$k(r) \;=\; \frac{x'(r)y''(r) - x''(r)y'(r)}{\big(x'(r)^2 + y'(r)^2\big)^{3/2}}.$$

Portanto, a curvatura de uma curva regular não parametrizada pelo comprimento de arco é dada por

$$k(r) \;=\; \frac{x'(r)y''(r) - x''(r)y'(r)}{\big(x'(r)^2 + y'(r)^2\big)^{3/2}}.$$

□

Calcularemos a seguir a curvatura de alguns exemplos de curvas não parametrizadas pelo comprimento de arco.

Exemplo 2.25. *Considere a curva*

$$\alpha(t) \;=\; \big(\cos(t)(2\cos(t) - 1),\ \operatorname{sen}(t)(2\cos(t) - 1)\big),$$

cujo traço é uma cardioide. Então,

$$\alpha'(t) \;=\; \big(-\operatorname{sen}(t)(4\cos(t) - 1),\ \cos(t)(2\cos(t) - 1) - 2\operatorname{sen}^2(t)\big).$$

Derivando novamente, obtemos

$$\alpha''(t) \;=\; \big(\cos(t) - 4\cos(2t),\ \cos(t) - 4\operatorname{sen}(2t)\big).$$

Para calcular a curvatura da curva α, utilizamos a fórmula

$$k(t) \;=\; \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{3/2}}.$$

Temos

$$\begin{cases} x'(t) &= -\operatorname{sen}(t)(4\cos(t)-1) \\ y'(t) &= \cos(t)(2\cos(t)-1) - 2\operatorname{sen}^2(t) \\ x''(t) &= \cos(t) - 4\cos(2t) \\ y''(t) &= \operatorname{sen}(t) - 4\operatorname{sen}(2t) \end{cases}.$$

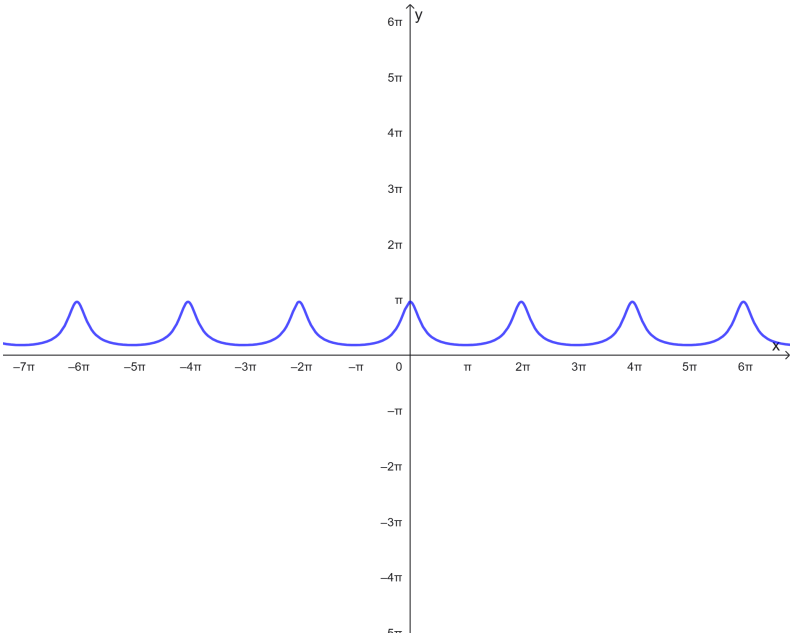
Substituindo estas expressões na fórmula da curvatura, segue que

$$\begin{aligned} k(t) = & \frac{(-\operatorname{sen}(t)(4\cos(t)-1))(\operatorname{sen}(t)-4\operatorname{sen}(2t))}{\left((-\operatorname{sen}(t)(4\cos(t)-1))^2 + (\cos(t)(2\cos(t)-1) - 2\operatorname{sen}^2(t))^2\right)^{3/2}} \\ & - \frac{(\cos(t)-4\cos(2t))(\cos(t)(2\cos(t)-1) - 2\operatorname{sen}^2(t))}{\left((-\operatorname{sen}(t)(4\cos(t)-1))^2 + (\cos(t)(2\cos(t)-1) - 2\operatorname{sen}^2(t))^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura da cardioide é dada por

$$k(t) = \frac{9-6\cos(t)}{\left(5-4\cos(t)\right)^{3/2}}.$$

Figura 2.39



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Na figura anterior, observamos o comportamento da curvatura da cardioide, cuja representação é apresentada na Figura 2.24. Note que, quando o parâmetro t varia de 0 a 2π, a curvatura sofre variações ao longo da curva. Para $t = 0$, a curvatura atinge seu valor máximo,

$$k(0) = 3,$$

no ponto

$$\alpha(0) = (1, 0).$$

À medida que t aumenta, a curvatura diminui gradativamente até atingir seu valor mínimo em $t = \pi$, dado por

$$k(\pi) \approx 0,55,$$

correspondente ao ponto

$$\alpha(\pi) = (3, 0).$$

A partir desse ponto, a curvatura volta a aumentar gradativamente e quando $t = 2\pi$, retorna ao seu valor máximo,

$$k(2\pi) = 3,$$

novamente no ponto

$$\alpha(2\pi) = (1, 0).$$

Dessa forma, observa-se que a curvatura da cardioide não é constante, variando ao longo da curva de acordo com a posição considerada. Esse comportamento evidencia que a cardioide apresenta regiões de maior e de menor curvatura, conforme ilustrado na Figura 2.24.

Exemplo 2.26. *Considere a curva regular α dada por*

$$\alpha(t) = (t^5 - 2t,\, t^4 - 2),\, t \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\alpha'(t) = (5t^4 - 2,\, 4t^3).$$

Derivando novamente, obtemos

$$\alpha''(t) = (20t^3,\, 12t^2).$$

Para calcular a curvatura da curva α, utilizamos a fórmula

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

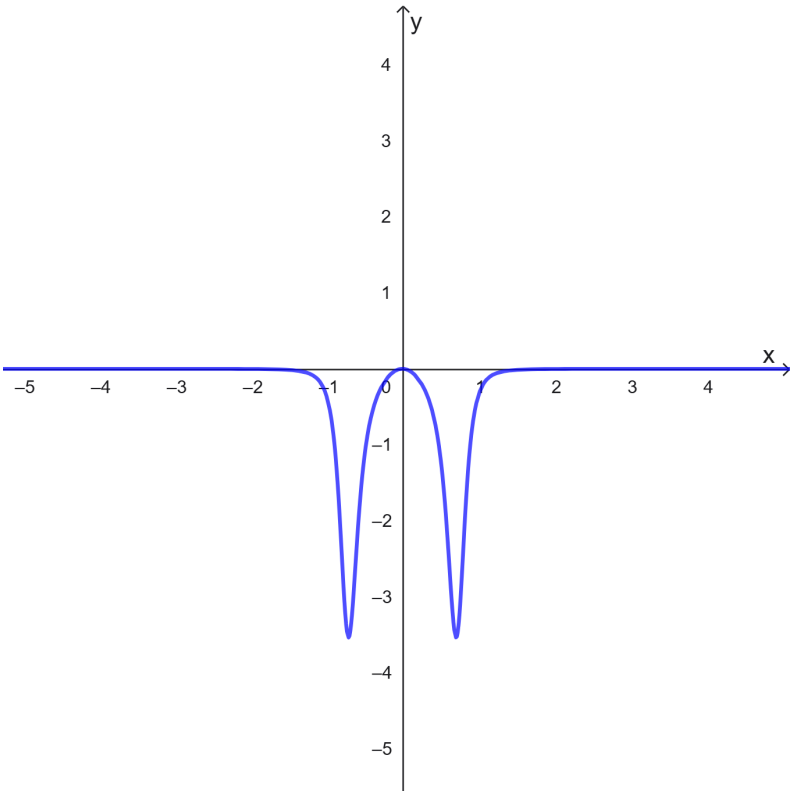
Substituindo as expressões na fórmula da curvatura, segue que

$$k(t) = \frac{(5t^4 - 2)(12t^2) - (20t^3)(4t^3)}{\left[(5t^4 - 2)^2 + (4t^3)^2\right]^{3/2}}.$$

Portanto, a curvatura da curva α é dada por

$$k(t) = \frac{-4t^2(5t^4 + 6)}{\left(4 - 20t^4 + 16t^6 + 25t^8\right)^{3/2}}.$$

Figura 2.40



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Na figura anterior, observamos o comportamento da curvatura, cuja representação é apresentada na Figura 2.22. Note que, quando o parâmetro t varia em $\mathbb{R}$, a curvatura sofre variações ao longo da curva. Para $t = 0$, a curvatura é nula e assume um máximo local, isto é,

$$k(0) = 0,$$

no ponto

$$\alpha(0) = (0, -2).$$

Quando $t \to \pm\infty$, a curvatura tende a zero. Para

$$t \approx \pm\, 0,707941,$$

a curvatura assume seu valor mínimo. Além disso,

$$\alpha(-0,707941) \;=\; (1,23806006783, -1,74881814703),$$

$$\alpha(0,707941) \;=\; (-1,23806006783, -1,74881814703).$$

Exemplo 2.27. *Considere a curva*

$$\alpha(t) \;=\; \big(e^t \cos(t),\, e^t \operatorname{sen}(t)\big),\; t \in \mathbb{R},$$

cujo traço é uma espiral logarítmica. Então

$$\alpha'(t) \;=\; \big(e^t\cos(t) - e^t\,\mathrm{sen}(t), e^t\,\mathrm{sen}(t) + e^t\cos(t)\big).$$

Derivando novamente, obtemos

$$\alpha''(t) \;=\; \big(-2e^t\,\mathrm{sen}(t),\, 2e^t\cos(t)\big).$$

Para calcular a curvatura da curva α, utilizamos a fórmula

$$k(t) \;=\; \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{3/2}}.$$

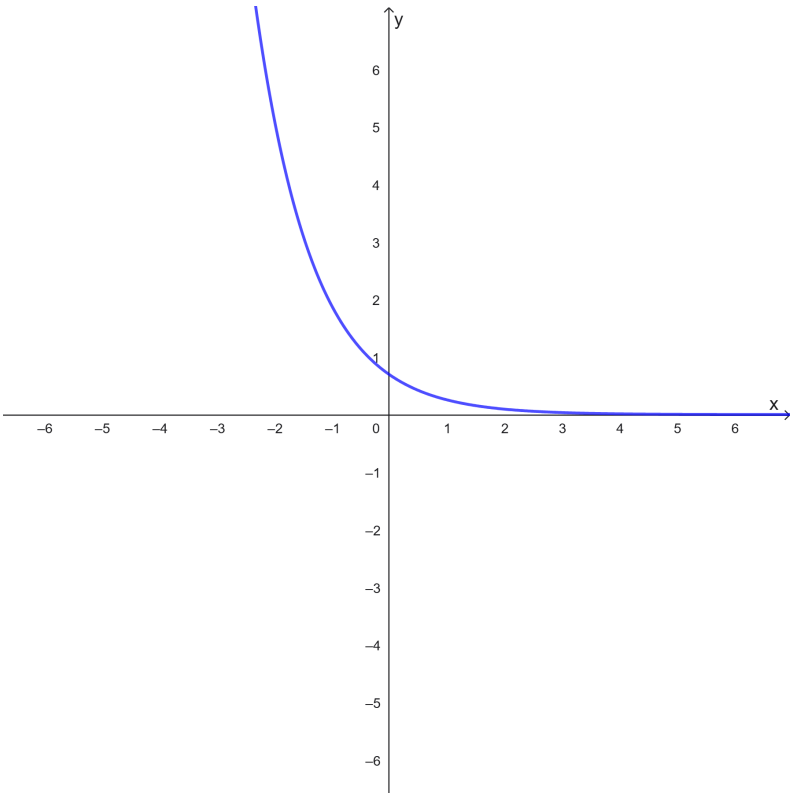
Substituindo as expressões na fórmula da curvatura, segue que

$$k(t) \;=\; \frac{e^t\big(\cos(t) - \mathrm{sen}(t)\big)\cdot 2e^t\cos(t) - \big(-2e^t\,\mathrm{sen}(t)\cdot e^t(\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t))\big)}{\big[\big(e^t(\cos(t) - \mathrm{sen}(t)\big)^2 + \big(e^t(\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t)\big)^2\big]^{3/2}}.$$

Portanto, a curvatura da curva α é dada por

$$k(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}\,e^t}.$$

Figura 2.41



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Na figura anterior, observamos o comportamento da curvatura da espiral logarítmica, cuja representação é apresentada na Figura 2.34. Note que, quando o parâmetro

t varia em $\mathbb{R}$, a curvatura decresce exponencialmente à medida que $t \to \infty$. Por outro lado, quando $t \to -\infty$, a curvatura cresce exponencialmente. Note que, a curvatura varia continuamente ao longo da espiral. Além disso, a espiral logarítmica não apresenta pontos de máximo ou mínimo para a curvatura, uma vez que a derivada $k'(t)$ assume apenas valores menores que 0 ao longo da curva.

A função curvatura é o elemento central de um dos principais resultados da Geometria Diferencial, o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Este resultado estabelece que a curvatura determina completamente a forma de uma curva regular plana, desde que esta esteja parametrizada pelo comprimento de arco. Em outras palavras, a curvatura pode ser interpretada como uma espécie de identidade da curva. De maneira mais precisa, o teorema afirma que, dada uma função curvatura suficientemente regular, existe uma curva plana, parametrizada pelo comprimento de arco, correspondente. Além disso, se duas curvas planas possuem a mesma função curvatura, então elas diferem apenas por um movimento rígido do plano, isto é, por uma translação e/ou uma rotação.

Capítulo 3

Teorema dos Quatro Vértices

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos e resultados fundamentais sobre pontos críticos (vértices) e curvas convexas, os quais serão essenciais para a compreensão do Teorema dos Quatro Vértices, cuja demonstração será apresentada ao longo do capítulo. Alguns resultados, demonstrações e definições relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral serão omitidos, uma vez que não constituem o foco principal deste estudo. Como referências principais, utilizaremos (TENENBLAT, 2008) e (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2020), nas quais são apresentados os conceitos e resultados que fundamentam o desenvolvimento deste capítulo.

Um dos principais resultados da teoria das curvas planas é o Teorema dos Quatro Vértices, cuja origem remonta ao ano de 1909, quando o indiano Syamadas Mukhopadhyaya (1866-1937) publicou a primeira demonstração desse resultado. Em seu trabalho, o autor estabeleceu o teorema para o caso de curvas regulares, simples, fechadas e com curvatura estritamente positiva, desde que não fossem círculos, isto é, para curvas estritamente convexas (curva convexa que não contém segmentos de reta). Posteriormente, em 1912, o alemão Adolf Kneser (1862-1930) generalizou esse resultado ao demonstrar o teorema para curvas simples e fechadas não necessariamente convexas. Com o passar dos anos, esse resultado foi sendo generalizado para diversos contextos, dando origem a diferentes demonstrações, algumas baseadas em propriedades analíticas e outras geométricas. Em consequência, esse resultado tornou-se uma das ferramentas mais importantes no estudo das curvas planas e da Geometria Diferencial.

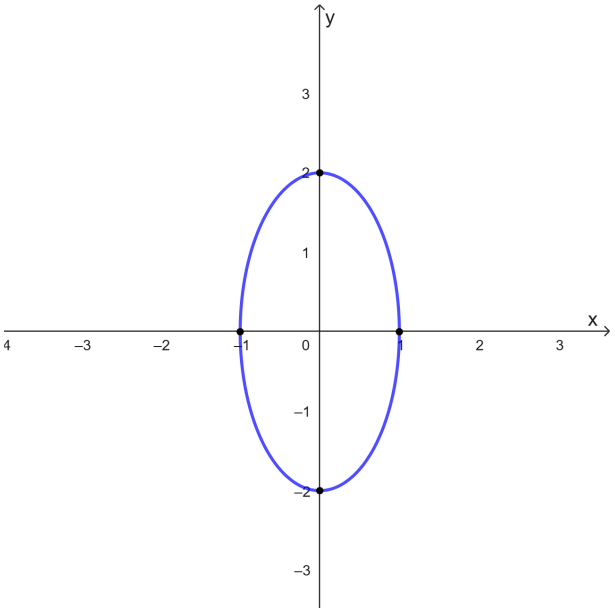
Definição 3.1 (Vértice)**.** *Um vértice de uma curva regular α é um ponto crítico da função curvatura k, isto é, um ponto da curva no qual k assume um máximo ou mínimo local.*

Como, em uma curva fechada, os extremos a e b correspondem ao mesmo ponto da curva, segue que

$$k'(a) = k'(b).$$

Assim, caso existam vértices correspondentes aos pontos a e b, eles representam o mesmo ponto da curva, portanto, são contabilizados como um único vértice. É possível compreender esta noção na Figura 3.1.

Figura 3.1: Elipse



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Na figura anterior, temos a elipse dada por $\alpha(t) = (\cos t,\, 2\,\mathrm{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Observe que a curva é fechada, pois $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (1, 0)$, isto é, $t = 0$ e $t = 2\pi$ representam o mesmo ponto da curva. Além disso, a curva é regular, uma vez que

$$\alpha'(t) \;=\; (-\,\mathrm{sen} t,\, 2\cos t)$$

não se anula para $t \in [0, 2\pi]$. Como as funções envolvidas seno e cosseno são de classe C^∞, conclui-se que a curva α também é de classe C^∞ e em particular, de classe C^3, conforme exigido nas hipóteses do Teorema dos Quatro Vértices. A função curvatura da elipse é dada por

$$k(t) = \frac{2}{\left(\mathrm{sen}^2(t) + 4\cos^2(t)\right)^{3/2}},$$

portanto, sua derivada é

$$k'(t) = \frac{18\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)}{\left(\mathrm{sen}^2(t) + 4\cos^2(t)\right)^{5/2}}.$$

Os vértices da curva ocorrem nos pontos críticos da função curvatura, isto é, quando $k'(t) = 0$. Assim, os pontos correspondentes aos vértices são $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Além disso,

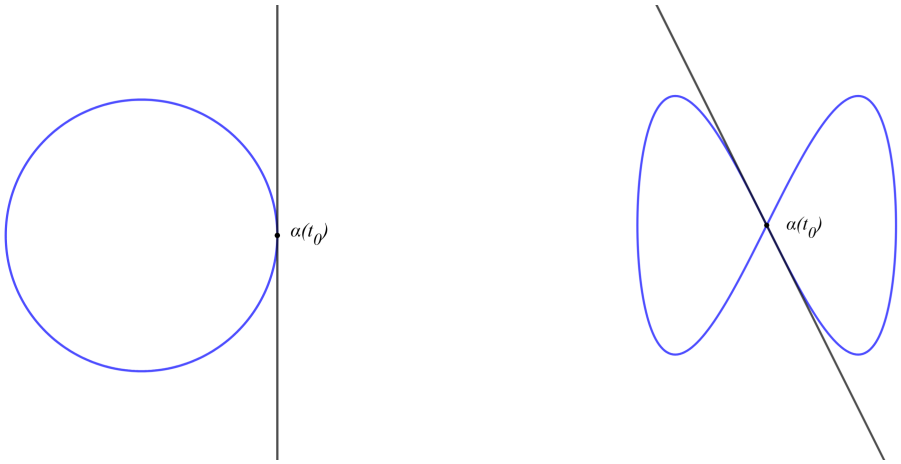
$$k'(0) = k'(2\pi) = 0.$$

Como 0 e 2π representam o mesmo ponto da curva, esse vértice é contabilizado apenas uma vez.

Definição 3.2 (Curva Convexa)**.** *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Dizemos que α é convexa se, para todo $t_0 \in I$, o traço da curva está inteiramente contido em um dos semiplanos determinados pela reta tangente à curva no ponto $\alpha(t_0)$.*

Essa definição será melhor compreendida por meio das figuras apresentadas a seguir.

Figura 3.2: Representação



(a) Curva convexa. (b) Curva não convexa.

Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

A Figura 3.2 (a) representa uma curva convexa. Observa-se que, no ponto $\alpha(t_0)$, o traço da curva, que neste caso é uma circunferência, permanece inteiramente contido em um dos semiplanos determinados pela reta tangente à curva em $\alpha(t_0)$ e isso acontece para todo ponto da curva. Por outro lado, a Figura 3.2 (b) representa uma curva não convexa. Nesse caso, no ponto $\alpha(t_0)$, verifica-se que o traço da curva, que neste caso é uma lemniscata, encontra-se distribuído nos dois semiplanos determinados pela reta tangente à curva em $\alpha(t_0)$.

Observação 3.1. *De maneira mais precisa, seja $N(t_0)$ o vetor normal unitário à curva em t_0. A curva α é convexa se, para todo $t_0 \in I$, a função $h_{t_0}(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle$ não muda de sinal para todo $t \in I$.*

Proposição 3.1 (Segundo Teorema do Valor Médio para Integrais)**.** *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções reais. Se f e g' são funções contínuas e g é uma função monótona, então existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

A demonstração da proposição anterior será omitida neste trabalho e pode ser encontrada em (HOBSON, 1909). Nesse trabalho, Hobson menciona que a primeira versão da Proposição 3.1 é atribuída a Bonnet, enquanto outra versão foi obtida por Weierstrass e Du Bois-Reymond.

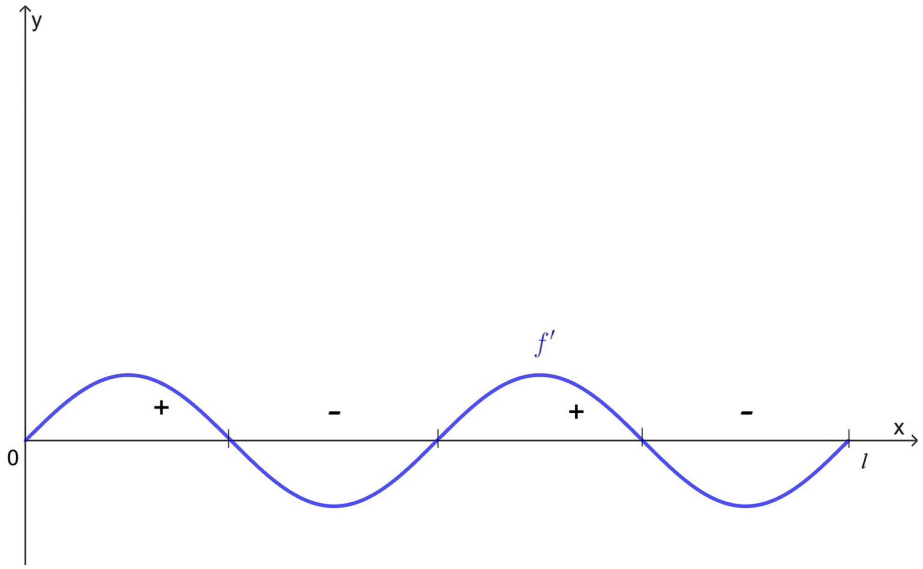
Proposição 3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica, de período l, e de classe C^1. Se f não é constante em nenhum subintervalo de $\mathbb{R}$, então a soma dos números de pontos de máximo e mínimo locais de f em $[0, l)$ é sempre um número par.*

Demonstração. Considere a função contínua $f' : [0, l] \to \mathbb{R}$. Como f é periódica de período l e de classe C^1, temos

$$f'(0) = f'(l).$$

Suponhamos que $f'(0) = f'(l) > 0$. Nesse caso, f é crescente nas vizinhanças de 0 e de l. Como f' muda de sinal em cada máximo ou mínimo local, o intervalo $[0, l)$ pode ser dividido em subintervalos nos quais f' possui sinais alternados, iniciando e terminando positivo. Logo, existe um número ímpar de subintervalos. Consequentemente, o número de mudanças de sinal de f' é par. Como cada mudança de sinal corresponde a um máximo ou a um mínimo local de f, segue que a soma do número de máximos e mínimos locais de f em $[0, l)$ é um número par, ilustrado na Figura 3.3. O caso em que $f'(0) = f'(l) < 0$ é análogo ao caso anterior.

Figura 3.3



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Por outro lado, se $f'(0) = f'(l) = 0$, temos duas situações.

(i) $f'(x)$ possui o mesmo sinal em $(0, \varepsilon)$ e em $(l - \varepsilon, l)$, para algum $(\varepsilon > 0)$.

Neste caso, o intervalo $[0, l)$ pode ser dividido em um número ímpar de subintervalos nos quais f' possui sinais alternados. Logo, o número de mudanças de sinal de f' é par, implicando que o número de máximos e mínimos locais de f em $[0, l)$ é par, visto que $f(0)$ e $f(l)$ são pontos de inflexão.

(ii) $f'(x)$ possui sinais opostos em $(0, \varepsilon)$ e em $(l - \varepsilon, l)$.

Nesse caso, o intervalo $[0, l)$ é dividido em um número par de subintervalos de sinais alternados para f'. Logo, o número de máximos e mínimos locais de f em $[0, l)$ é ímpar. Como os extremos 0 e l representam o mesmo ponto devido à periodicidade de f, temos que a soma do número de máximos e mínimos locais de f em $[0, l)$ constinua sendo um número par.

Portanto, em todos os casos, a soma do número de máximos e mínimo locais de f no intervalo $[0, l)$ é sempre um número par. □

Teorema 3.1 (Teorema dos Quatro Vértices)**.** *Seja $\alpha : I = [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular, fechada, simples, convexa e de classe C^3. Então, α possui pelo menos quatro vértices.*

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema dos Quatro Vértices, utilizaremos alguns resultados já estabelecidos ao longo deste trabalho.

(i) Como exemplo de curva que satisfaz as hipóteses do teorema, considere a elipse apresentada na Figura 3.1. Conforme visto anteriormente, ela é uma curva regular, simples, fechada, convexa e de classe C^3, possuindo exatamente quatro vértices.

(ii) Conforme visto no Capítulo 2, toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco.

(iii) Se a função curvatura k for constante em algum subintervalo $J \subset I$, todos os pontos desse subintervalo serão pontos críticos, implicando que a curva possui infinitos vértices. Por outro lado, pela Proposição 3.2 se a função curvatura não é constante em nenhum subintervalo, então o número de seus pontos críticos é par.

(iv) Também foi mencionado no Capítulo 2 que a função curvatura é invariante por movimentos rígidos do plano. Portanto, translações e rotações não alteram a curvatura nem o número de vértices da curva.

Suponhamos, por contradição, que uma curva α possua apenas dois vértices, denominados M e P. Através dos resultados (ii) e (iv), podemos garantir, por um movimento rígido (rotação e translação), uma reparametrização da curva de modo que esses vértices sejam

$$M = \alpha(0) = (0, 0)$$

e

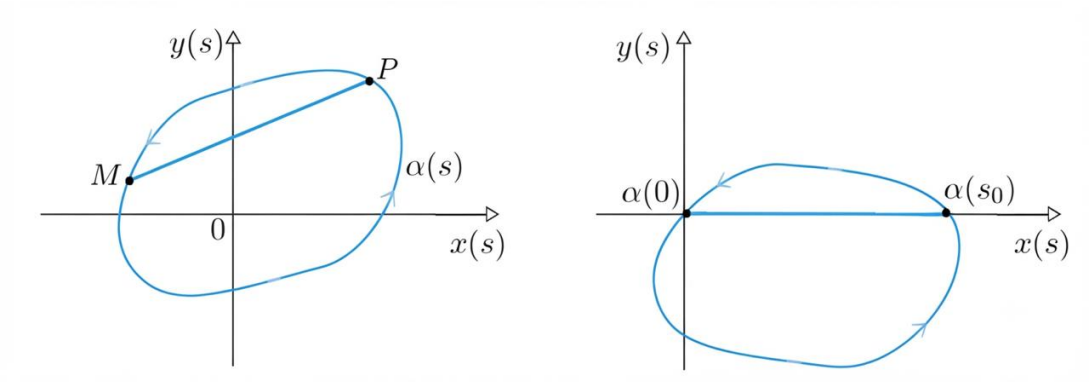
$$P = \alpha(s_0) = \big(x(s_0), 0\big),$$

com

$$k'(0) = k'(s_0) = 0.$$

Isso é ilustrado na figura a seguir.

Figura 3.4: Movimento rígido (rotação e translação) da curva α



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Como M e P são os únicos vértices, a função curvatura não possui outros pontos críticos. Em particular,

$$k(0) - k(s_0) \neq 0. \tag{3.1}$$

De fato, suponha que $k(0) = k(s_0)$. Se k fosse constante em $[0, s_0]$, então, pelo resultado (iii), todos os pontos desse intervalo seriam vértices, contradizendo a hipótese de que existem apenas dois vértices. Caso contrário, pelo Teorema de Rolle, existiria um ponto $s_1 \in (0, s_0)$ tal que

$$k'(s_1) = 0,$$

o que produziria um terceiro vértice, novamente contradizendo a hipótese. Portanto, vale (3.1).

Consideremos a curva α parametrizada pelo comprimento de arco, dada por

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)),\ s \in [0, L],$$

no qual L representa o comprimento total da curva. Como α é convexa e os pontos M e P estão sobre o eixo x, podemos escolher a orientação de modo que

- no primeiro arco, a curva permanece inteiramente abaixo do eixo x, logo,

$$y(s) < 0,\ 0 < s < s_0; \tag{3.2}$$

- no segundo arco, a curva retorna ao ponto inicial acima do eixo x, logo,

$$y(s) > 0,\ s_0 < s < L. \tag{3.3}$$

Como a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco, usando as equações de Frenet, temos que

$$t'(s) = k(s)n(s),$$

onde

$$t(s) = (x'(s), y'(s))$$

e

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Assim,

$$t'(s) = (x''(s), y''(s))$$

e, portanto,

$$x''(s) = -k(s)y'(s)$$

e

$$y''(s) = k(s)x'(s).$$

Da primeira igualdade, obtemos

$$k(s)y'(s) = -x''(s).$$

Integrando ambos os lados em $[0, L]$ com respeito a s, temos

$$\int_0^L k(s)y'(s)\,ds = -\int_0^L x''(s)\,ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^L k(s)y'(s)\,ds = -\int_0^L x''(s)\,ds = -x'(s)\Big|_0^L = -x'(L) + x'(0).$$

Como α é uma curva fechada,

$$\alpha'(0) = \alpha'(L),$$

e segue que

$$\int_0^L k(s)y'(s)\,ds \;=\; 0. \tag{3.4}$$

Por outro lado, separando a integral nos intervalos $[0, s_0]$ e $[s_0, L]$, temos

$$\int_0^L k(s)y'(s)\,ds \;=\; \int_0^{s_0} k(s)y'(s)\,ds + \int_{s_0}^L k(s)y'(s)\,ds. \tag{3.5}$$

Como k é monótona em cada um desses intervalos, podemos aplicar o Segundo Teorema do Valor Médio para Integrais (Proposição 3.1). Assim, existe $\xi_1 \in (0, s_0)$ tal que

$$\int_0^{s_0} k(s)y'(s)\,ds \;=\; k(0)\int_0^{\xi_1} y'(s)\,ds + k(s_0)\int_{\xi_1}^{s_0} y'(s)\,ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^{s_0} k(s)y'(s)\,ds \;=\; k(0)\big[y(\xi_1) - y(0)\big] + k(s_0)\big[y(s_0) - y(\xi_1)\big].$$

Como

$$y(0) = y(s_0) = 0,$$

segue que

$$\int_0^{s_0} k(s)y'(s)\,ds \;=\; y(\xi_1)\big[k(0) - k(s_0)\big]. \tag{3.6}$$

De maneira análoga, existe $\xi_2 \in (s_0, L)$ tal que

$$\int_{s_0}^L k(s)y'(s)\,ds \;=\; k(s_0)\int_{s_0}^{\xi_2} y'(s)\,ds + k(L)\int_{\xi_2}^L y'(s)\,ds.$$

Como a curvatura é periódica, temos

$$k(L) = k(0).$$

Além disso, como α é fechada,

$$y(L) = y(0) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{s_0}^L k(s)y'(s)\,ds \;&=\; k(s_0)\big[y(\xi_2) - y(s_0)\big] + k(L)\big[y(L) - y(\xi_2)\big]\\ &=\; k(s_0)y(\xi_2) - k(0)y(\xi_2)\\ &=\; y(\xi_2)\big[k(s_0) - k(0)\big].\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{s_0}^{L} k(s)y'(s)\,ds \;=\; y(\xi_2)\big[k(s_0)-k(0)\big]. \tag{3.7}$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L k(s)y'(s)\,ds \;&=\; \int_0^{s_0} k(s)y'(s)\,ds + \int_{s_0}^{L} k(s)y'(s)\,ds\\ &=\; y(\xi_1)\big[k(0)-k(s_0)\big] + y(\xi_2)\big[k(s_0)-k(0)\big]\\ &=\; y(\xi_1)\big[k(0)-k(s_0)\big] - y(\xi_2)\big[k(0)-k(s_0)\big]\\ &=\; \big[y(\xi_1)-y(\xi_2)\big]\big[k(0)-k(s_0)\big].\end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $\xi_1 \in (0, s_0)$, pela condição (3.2), temos

$$y(\xi_1) < 0.$$

Por outro lado, como $\xi_2 \in (s_0, L)$, pela condição (3.3), tem-se

$$y(\xi_2) > 0.$$

Logo,

$$y(\xi_1) - y(\xi_2) < 0,$$

e, em particular,

$$y(\xi_1) - y(\xi_2) \neq 0.$$

Além disso, pela relação (3.1),

$$k(0) - k(s_0) \neq 0.$$

Consequentemente,

$$\big[y(\xi_1)-y(\xi_2)\big]\big[k(0)-k(s_0)\big] \neq 0.$$

Pela igualdade (3.8), isso implica que

$$\int_0^L k(s)y'(s)\,ds \neq 0,$$

o que contradiz (3.4), isto é,

$$\int_0^L k(s)y'(s)\,ds = 0.$$

Portanto, a hipótese de que a curva α possui apenas dois vértices é falsa. Pela Proposição 3.2, o número de vértices de uma curva fechada é sempre par. Assim, pelo menos

quatro vértices devem existir. Portanto, toda curva regular, fechada, simples, convexa e de classe C^3 possui pelo menos quatro vértices.

□

É importante observar que as hipóteses do teorema são fundamentais para garantir a existência de pelo menos quatro vértices. A elipse, por exemplo, satisfaz todas as hipóteses do Teorema dos Quatro Vértices, conforme ilustrado na Figura 3.1. A seguir, apresentamos três contraexemplos de curvas estudadas ao longo deste trabalho que não satisfazem algumas dessas hipóteses e, portanto, não se enquadram nas condições do teorema.

Exemplo 3.1. *Considere a curva*

$$\alpha(t) = (t - \operatorname{sen}(t),\ 1 - \cos(t)),\ t \in [0, 2\pi],$$

cujo traço é uma cicloide. Seu vetor tangente é dado por

$$\alpha'(t) = (1 - \cos(t),\ \operatorname{sen}(t)).$$

Para $t = 0$,

$$\alpha'(0) = (0, 0).$$

Portanto, a curva não é regular em $t = 0$. *Além disso,*

$$\alpha(0) = (0, 0)$$

e

$$\alpha(2\pi) = (2\pi, 0).$$

Como os extremos do intervalo não representam o mesmo ponto, conforme ilustrado na Figura 2.35. Conclui-se que a curva não é fechada. Podemos observar a quantidade de vértices dessa curva. Para $t \in (0, 2\pi)$, *onde a cicloide é regular, sua curvatura é dada por*

$$k(t) = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Derivando, obtemos

$$k'(t) = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{8\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Para $t = \pi$, *a derivada da curvatura é nula e assume um único ponto crítico, isto é,*

$$k'(t) = 0,$$

no ponto

$$\alpha(\pi) = (\pi, 2).$$

Portanto, no intervalo regular considerado, a cicloide possui apenas um vértice. Dessa forma, o Teorema dos Quatro Vértices não pode ser aplicado à cicloide, pois, além de possuir apenas um vértice, a curva não satisfaz duas de suas hipóteses: a curva não é regular e não é fechada.

Exemplo 3.2. *Considere a curva*

$$\alpha(t) = \big(e^t \cos(t),\, e^t \operatorname{sen}(t)\big),\ t \in [0, 2\pi],$$

cujo traço é uma espiral logarítmica. Para $t = 0$ e $t = 2\pi$,

$$\alpha(0) = (1, 0)$$

e

$$\alpha(2\pi) = \big(e^{2\pi}, 0\big).$$

Como os extremos do intervalo não representam o mesmo ponto, conclui-se que a curva não é fechada. Além disso, a espiral logarítmica é uma curva não convexa, conforme ilustrado na Figura 2.34. Podemos observar a quantidade de vértices dessa curva. Para $t \in [0, 2\pi]$, sua curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{\sqrt{2}}{2e^t}.$$

Derivando, obtemos

$$k'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2e^t}.$$

Como

$$k'(t) < 0,\ \forall t \in [0, 2\pi],$$

concluímos que a função curvatura é estritamente decrescente em todo o intervalo. Portanto,

$$k'(t) \neq 0.$$

Deste modo, a espiral logarítmica não possui vértices. Dessa forma, o Teorema dos Quatro Vértices não pode ser aplicado à espiral logarítmica, pois, além de não possuir vértices,a curva não satisfaz duas de suas hipóteses: a curva não é fechada e não é convexa.

Exemplo 3.3. *Considere a curva*

$$\alpha(t) = \big(\cos(t)(2\cos(t) - 1),\, \operatorname{sen}(t)(2\cos(t) - 1)\big),\ t \in [0, 2\pi],$$

cujo traço é uma cardioide. Seu vetor tangente é dado por

$$\alpha'(t) = \big(- \operatorname{sen}(t)\,(4\cos(t) - 1), \cos(t)\,(2\cos(t) - 1) - 2\operatorname{sen}^2(t)\big).$$

Observe que

$$\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (1, 0),$$

portanto, a curva é fechada. Além disso, temos $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ *para todo* $t \in [0, 2\pi]$. *Portanto, a curva é regular. Entretanto, a curva não é simples, pois apresenta pontos múltiplos*

$$\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \alpha\left(\frac{5\pi}{3}\right) = (0, 0),$$

e não é convexa, conforme ilustrado na Figura 2.24. Podemos observar a quantidade de vértices dessa curva. Para $t \in (0, 2\pi)$, *sua curvatura é dada por*

$$k(t) = \frac{9 - 6\cos(t)}{\big(5 - 4\cos(t)\big)^{3/2}},$$

e sua derivada é

$$k'(t) = \frac{12\operatorname{sen}(t)(\cos(t) - 2)}{\big(5 - 4\cos(t)\big)^{5/2}},$$

Para $t = 0, \pi, 2\pi$, *a derivada da curvatura é nula e assume dois pontos críticos, isto é,*

$$k'(t) = 0,$$

no ponto

$$\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (1, 0)$$

e

$$\alpha(\pi) = (3, 0).$$

Portanto, o Teorema dos Quatro Vértices não pode ser aplicado à cardioide, pois, além de possuir apenas dois vértices, a curva não satisfaz duas de suas hipóteses: a curva não é simples e não é convexa.

Esses contraexemplos mostram que as hipóteses do Teorema dos Quatro Vértices são fundamentais. A ausência de uma delas é suficiente para que não seja possível garantir a existência de pelo menos quatro vértices.

Capítulo 4

Considerações Finais

O principal objetivo deste trabalho foi alcançado, a partir da apresentação e demonstração do Teorema dos Quatro Vértices para uma curva regular, fechada, simples e convexa. Para isso, foi apresentado ao leitor o estudo das curvas planas, buscando uma abordagem objetiva e introdutória, com o auxílio de exemplos e figuras, de modo a facilitar a compreensão dos conceitos e dos resultados apresentados. A construção deste trabalho possibilitou um primeiro contato com a Geometria Diferencial, área de estudo da Matemática que não está presente na matriz curricular da graduação em Licenciatura em Matemática do IFBA - Campus Valença. De modo geral, os conteúdos aprendidos ao longo do curso foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, principalmente aqueles relacionados à Geometria Analítica e ao Cálculo Diferencial. Por fim, espera-se que este trabalho possa servir como fonte de estudo, principalmente para estudantes de graduação que estejam tendo um primeiro contato com a Geometria Diferencial, bem como incentivar novos estudos e pesquisas nessa área.

Referências

ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. S. *Geometria diferencial de curvas no* $\mathbb{R}^2$. Rio de Janeiro, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020. (Coleção Coletâneas de Matemática).

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Tradução de Elza F. Gomide. ISBN 978-85-212-0023-9.

CARMO, M. P. do. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. Coleção Textos Universitários. ISBN 85-85818-26-3.

EVES, H.; DOMINGUES, H. H. *Tópicos de História da Matemática: Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. Tradução e adaptação de Hygino H. Domingues.

FABRI, M. A.; SOUZA, J. A. de. Aspectos de geometria diferencial clássica. *Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas*, Maringá, PR, 2016. Projeto PIBIC/CNPq/FA/UEM.

GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

GORODSKI, C. Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria. *Revista Humboldt Brasil*, 2002.

HOBSON, E. W. On the second mean-value theorem of the integral calculus. *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 2, n. 1, p. 14–23, 1909.

IMPA. *Matemático Manfredo do Carmo morre aos 89 anos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Disponível em: <https://impa.br/notices/matematico-manfredo-do-carmo-morre-aos-89-anos/>. Acesso em: 24 out. 2025.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. 3. ed. Columbia: Addison-Wesley, 2009.

OLIVEIRA, J. C. de; GOULART, C. Teorema Egregium de Gauss. In: *XXIII Seminário de Iniciação Científica da Universidade Estadual de Feira de Santana*. Feira de Santana: UEFS, 2019. Semana Nacional de Ciência e Tecnologia.

STRAVA. *Strava: aplicativo de monitoramento de atividades físicas*. 2025. Disponível em: <https://www.strava.com>. Acesso em: 6 nov. 2025.

TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria diferencial*. 2. ed. São Paulo: Blücher, 2008. ISBN 978-85-212-0467-1.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

Jackson Silva dos Santos

Um estudo sobre o Teorema dos Quatro Vértices

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 13/08/2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Prof. Dr. Edvan Santos da Trindade
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Prof. Me. Marcelo de Araújo Lino
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 05 de agosto de 2026.

Documento assinado eletronicamente por **Diogo Soares Dorea da Silva**, **Professor Efetivo**, em 14/08/2026, às 06:36, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **EDVAN SANTOS DA TRINDADE**, **Professor Efetivo**, em 14/08/2026, às 18:55, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **MARCELO DE ARAUJO LINO**, **Professor Efetivo**, em 17/08/2026, às 05:30, conforme decreto nº 8.539/2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site http://sei.ifba.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&acao_origem=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **5017471** e o código CRC **4ABA1AD2**.