Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia da Bahia - Campus Valença
Licenciatura em Matemática

Daniele dos Santos Negrão Azevedo

Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas a Modelos Epidemiológicos: uma análise da propagação da COVID-19 no estado da Bahia

Valença-BA
2023

Daniele dos Santos Negrão Azevedo

Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas a Modelos Epidemiológicos: uma análise da propagação da COVID-19 no estado da Bahia

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia - Campus Valença, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof. Me. Ana Carolina M. Teixeira

Valença-BA
2023

A994e Azevedo, Daniele dos Santos Negrão
Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas a Modelos Epidemiológicos: uma análise da propagação da COVID-19 no estado da Bahia.-Valença- BA: IFBA,2023.
76f.;il.

Orientadora: Prof.ª Me. Ana Carolina M. Teixeira

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) Licenciatura em Matemática- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – Campus Valença, 2023.

1.Equações Diferenciais. 2. Modelos Epidemiológicos 3. COVID-19. I. Teixeira, Ana Carolina M. II. Título.
CDD: 515.625

Catalogação na fonte: Cátia Almeida de Andrade CRB1403-5 IFBA

Folha de Aprovação

Autor: Daniele dos Santos Negrão Azevedo

Título: Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas a Modelos Epidemiológicos: uma análise da propagação da COVID-19 no estado da Bahia

Banca Examinadora:

Prof. Me. Ana Carolina M. Teixeira (Orientadora)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
Assinatura: _____

Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
Assinatura: _____

Prof. Me. Roque da Silva Lyrio
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
Assinatura: _____

Valença-BA, 13 de Julho de 2023.

Pouco conhecimento faz com que as pessoas se sintam orgulhosas.
Muito conhecimento, que se sintam humildes.

Leonardo da Vinci (1452 - 1519)

Agradecimentos

Agradeço aos infinitos caminhos de força e sabedoria que o universo (Deus) permitiu chegar até a mim, sendo a mesma energia a me sustentar e me encher de ânimo quando precisei enfrentar todas as dificuldades ao longo desta jornada. A minha família, que merece todo o meu reconhecimento pelo apoio incondicional, amor, dedicação e paciência que me atribuíram durante todo o percurso.

Agradeço ao meu filho Gabriel, que esteve presente em cada momento, me auxiliando de forma efetiva, seja no cuidado comigo e até mesmo nas risadas e na companhia diária. Gabriel foi um pilar importante em toda essa jornada, sua energia foi fundamental para que eu chegasse até o fim do ciclo. Agradeço também a meu pai, que é sem dúvida uma verdadeira inspiração de força e determinação, que mostra todos os dias com seu exemplo que se lutar a vitória é certa, e que coragem e ânimo são fundamentais para vencer qualquer batalha.

Dedico também esta conquista às minhas amadas irmãs, Dai e Paula, que em cada etapa deste processo, estiveram ao meu lado, acreditando em mim e me apoiando de maneira incondicional. O amor inabalável e confiança em minhas capacidades foram verdadeiras fontes de força e inspiração ao longo desta jornada. Vocês acreditaram em mim, mesmo nos momentos em que eu duvidei de mim mesma. Obrigada por serem presenças constantes, por me amarem sem medidas e por apoiarem todas as minhas escolhas.

Ao meu querido companheiro Ricardo Alexandrino. Este, que foi meu pilar incansável, minha base sólida e meu maior incentivador, expresso minha profunda gratidão. Em todos os momentos difíceis desta jornada, você esteve ao meu lado, infundindo em mim coragem e confiança para seguir em frente. Sua paciência para ouvir minhas angústias e compartilhar minhas alegrias foi um presente valioso. Agradeço por ser meu porto seguro, por me apoiar incondicionalmente e por acreditar em mim, quando nem eu acreditei.

Agradeço a minha grande amiga Beta, que mesmo diante da minha ausência em diversos momentos, sempre demonstrou paciência e compreensão. Obrigada por estar ao meu lado, mesmo quando não podíamos nos encontrar com tanta frequência. Seu apoio

incondicional e crença nos meus sonhos são verdadeiros tesouros em minha vida.

A todos os meus colegas que estiveram presentes de forma direta ou indireta nesta jornada. Seja nos grupos de estudos, nas distrações e risadas pelos corredores do IFBA, cada um de vocês deixou uma marca especial em minha trajetória. Gostaria de expressar meu profundo agradecimento a Robson, Flaviane, Ytallo e Pati. Vocês foram parte essencial deste percurso, compartilhando momentos preciosos e contribuindo para o meu crescimento acadêmico. E, em especial, ao meu parceiro de curso e agora amigo, Sávio Negrão. Nossa amizade se fortaleceu ao longo do tempo, dividindo alegrias e tristezas, enfrentando os desafios juntos e carregando nossos fardos. Entre brigas e abraços, trabalhos e conversas, conseguimos nos unir e nos apoiar mutuamente.

Dedico esta conquista aos meus queridos professores, que não apenas acreditaram em mim, mas também se tornaram fontes inspiradoras como pessoas e profissionais. Em especial, quero expressar minha profunda gratidão a Pati Argolo, Diego Santiago, Eliete Barros e Márcia Goncalves. Vocês foram fundamentais em minha jornada, oferecendo suporte, orientação e confiança em meu potencial. Também meu professor Diogo Doréa, que conheci já no final do curso, sou imensamente grata por sua alegria e inteligência admirável. O professor que mesmo diante de conteúdos desafiadores, traz uma energia positiva que torna o ambiente acadêmico mais leve e agradável. Agradeço a disponibilidade e envolvimento do professor Margeylson Ribeiro, no auxílio quando solicitado.

Agradeço especialmente ao meu professor Marcelo Lino, que desde o primeiro contato me motivou e sempre me colocou no topo. Sua dedicação e crença em meu sucesso foram combustíveis para minha determinação, você foi um presente nesta jornada. Ao meu querido professor Roque Lyrio, que sempre me impulsionou para cima, ouvia todas as minhas reclamações com paciência e sempre muito afetuoso, ainda que não pareça. Sua capacidade de compreensão e apoio me ajudaram a superar desafios e a crescer.

Por fim, gratidão à minha querida orientadora, Ana. Desde o início, jamais imaginei que nossa conexão seria tão especial. Você se aventurou junto comigo nesse conteúdo denso e complexo, e, com sua leveza e sabedoria, guiou-me e acreditou em meu potencial, você é sensacional.

A todos vocês, expresso meu mais profundo agradecimento por terem contribuído de maneira significativa para o sucesso desta conquista. A conclusão desta licenciatura em Matemática marca não apenas o fim de uma etapa, mas também o início de uma jornada promissora, na qual aplicarei todo o conhecimento adquirido. Obrigada por fazerem parte da minha história!

Resumo

NEGRÃO, D. dos S. A. *Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas a Modelos Epidemiológicos: uma análise da propagação do COVID-19 no estado da Bahia.* 2023. 86p. Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - IFBA. Valença.

Este trabalho tem como objetivo analisar os modelos epidemiológicos baseados nas Equações Diferenciais aplicadas a doenças epidêmicas, visando compreender suas implicações na previsão, controle e prevenção de surtos e pandemias, buscando verificar o aprimoramento das estratégias de saúde pública e o bem-estar da população através dos modelos matemáticos. São apresentados os modelos SIS (Suscetível-Infectado-Suscetível), SIR (Suscetível-Infectado-Recuperado) e SEIHR (Suscetível-Exposto-Infectado-Hospitalizado-Recuperado) considerando a população total constante. Foi aplicado o modelo SIR para projeção dos níveis de evolução da infecção epidêmica da COVID-19 no estado da Bahia nas primeiras 15 semanas de 2021. Para tanto, especificou-se no corpo do trabalho parte da historicidade das Equações Diferenciais, seus métodos de soluções analíticas e o método de Runge-Kutta, utilizado como parâmetro de solução para o modelo de aplicação da COVID-19 na Bahia. Conforme os resultados obtidos, o modelo atinge aproximações significativas a população de infectados no período analisado.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Modelos Epidemiológicos. COVID-19.

Abstract

NEGRÃO, D. dos S. A. Ordinary Differential Equations applied to Epidemiological Models: an analysis of the spread of COVID-19 in the state of Bahia. 2023. 86p. Monograph (Bachelor's Degree in Mathematics). Federal Institute of Education, Science, and Technology of Bahia - IFBA. Valença.

This work aims to analyze the epidemiological models based on Differential Equations applied to epidemic diseases, in order to understand their implications in predicting, controlling and preventing outbreaks and pandemics, seeking to verify the improvement of public health strategies and the welfare of the population through mathematical models. The SIS (Susceptible-Infected-Susceptible), SIR (Susceptible-Infected-Recovered) and SEIHR (Susceptible-Exposed-Infected-Hospitalized-Recovered) models are presented, considering a constant total population. The SIR model was applied to project the evolution levels of COVID-19 epidemic infection in the state of Bahia in the first 15 weeks of 2021. For this end, I specify throughout this work, part of the Differential Equations historicity, their analytical solution methods and the Runge-Kutta method, used as a solution parameter for the model for the application of COVID-19 in Bahia. According to the results obtained, the model achieves significant approximations to the infected population in the analyzed period.

Keywords: Differential Equations. Epidemiological Models. COVID-19.

Lista de Ilustrações

Figura 1.1 – Inclinação da corda 18

Figura 3.1 – Família de Soluções 32
Figura 3.2 – Campos de direção da função (3.56): soluções para o ponto $y(0) = -2$ 40
Figura 3.3 – Campos de direção da função (3.56): soluções para o ponto $y(0) = 2$. 40

Figura 4.1 – Diagrama geral de transferência para o modelo SIS padrão. 61
Figura 4.2 – Retrato Linha de Fase SIS 66
Figura 4.3 – Diagrama geral de transferência para o modelo SIR padrão. 69
Figura 4.4 – Uma órbita do modelo SIR 70
Figura 4.5 – Retrato Linha de Fase SIR. 71
Figura 4.6 – Órbita SIR 73
Figura 4.7 – Diagrama geral de transferência para o modelo SEIHR padrão 74

Figura 5.1 – Distribuição do acumulado de casos confirmados de COVID-19 por semana epidemiológica Bahia, 2020-2021. 79
Figura 5.2 – Progressão da Infecção por COVID-19 na Bahia nas Primeiras 15 Semanas 80
Figura 5.3 – Simulação do Modelo SIR para Infectados (COVID-19 BAHIA) 81
Figura 5.4 – Dados reais e simulação SIR Infectados (COVID-19 BAHIA) 81
Figura 5.5 – Comparação entre Dados Reais e Simulação do Modelo Epidemiológico SIR de Infectados por COVID-19 no estado da Bahia 82

Lista de Tabelas

4.1 **Variáveis utilizadas nos Modelos SIS e SIR** 62
4.2 **Taxas utilizadas nos Modelos SIS e SIR** 62
4.3 **Parâmetros utilizados no Modelo SEIHR** 75

5.1 **Dados para simulação do Modelo SIR no estado da Bahia** 80

Sumário

0 Motivação **12**

1 Introdução **14**

1.1 Contexto Histórico das Equações Diferenciais 16

1.2 Objetivos 20

1.2.1 Objetivos Específicos 21

2 Metodologia **22**

2.1 Fonte de Coleta de Dados 23

2.2 População e Amostra 24

2.3 Análise de Dados 24

3 Equações Diferenciais **25**

3.1 Terminologia e Definições Básicas 25

3.1.1 Classificação pelo Tipo 26

3.1.2 Classificação pelo Número de Funções Incógnitas 27

3.1.3 Classificação pela Ordem 28

3.1.4 Classificação pela Linearidade 29

3.2 Soluções 29

3.2.1 Soluções Explícitas e Implícitas 31

3.2.2 Número de Soluções 32

3.2.3 Uma Família a $n-$parâmetros de Soluções 33

3.2.4 Solução de Equação Diferencial Ordinária de Ordem n 34

3.3 Equações Diferenciais de Primeira Ordem 35

3.3.1 Problema de Valor Inicial (PVI) 35

3.3.2 Existência e Unicidade de Solução para EDO 37

3.3.3 Variáveis Separáveis 41

3.3.4 Equações Homogêneas 42

3.3.5 Equações Exatas 45

3.3.6 Equações Lineares 51
3.3.7 Método Numérico 55
Métodos de Diferenças-Finitas 55
Método de Runge-Kutta 56
A Fórmula de Runge-Kutta de Quarta Ordem 57

4 Modelagem Matemática e a Pandemia da COVID-19 59
4.1 Modelagem Matemática e as Equações Diferenciais 59
4.2 Modelos Matemáticos Epidemiológicos 60
4.2.1 Modelo SIS 61
Variáveis e Constantes 61
Linha de fases para o sistema SIS 63
Número de reprodução básico R_0 67
4.2.2 Modelo SIR 68
Órbitas e retrato de fase para o sistema SIR 69
Interpretação das Órbitas 72
4.2.3 Modelo SEIHR 74
4.3 Pandemia da COVID-19 76

5 Resultados e Considerações Finais 78
5.0.1 Resultados 78
5.0.2 Considerações Finais 82

Referências Bibliográficas 84

Capítulo 0

Motivação

Muitas vezes ao entrar em contato com a Matemática, percebemos a associação de forma equivocada da dualidade entre sua forma abstrata e suas aplicações. A habilidade de empregá-la a situações concretas em diversas áreas do conhecimento humano, ou seja, traduzir a linguagem numérica para um modelo matemático, parece ser um desafio para os que buscam compreender e unir a ciência Matemática e suas aplicações.

Torna-se perceptível que se estuda as teorias matemáticas e que em muitos casos, há uma dificuldade em empregá-las concretamente na resolução de problemas ligados a Biologia, Química, Ciências Sociais entre outras áreas, ainda que a Matemática seja suficientemente importante e solicitada nestas áreas. Portanto, os modelos matemáticos, que são aplicações matemáticas que modelam uma situação ou problema sujeito a validação, pode ser um caminho promissor para evitar a dicotomia entre o abstrato e a prática.

A pandemia da COVID-19 teve um impacto significativo em todo o mundo, afetando inúmeras áreas da sociedade. A Matemática desempenhou um papel crucial na compreensão e interpretação dos efeitos dessa crise sanitária. Por isso, este trabalho surgiu com a perspectiva de compreender alguns modelos epidemiológicos, sob um ponto de vista matemático, com o propósito de associar a ciência muitas vezes abstrata da sala de aula à realidade atual e global.

O Cálculo Diferencial e Integral apresenta-se como um conteúdo fundamental de aplicações aos modelos que traduzem e interpretam fenômenos reais do cotidiano, aplicados em diversas áreas do conhecimento. Nesse sentido, a modelagem Matemática aplicada a epidemiologia é definida como a ciência que estuda os processos de doença e saúde na humanidade.Ela é responsável por analisar a evolução das infecções e os fatores determinantes dos danos à saúde e eventos associados à saúde coletiva, propondo medidas específicas de prevenção, controle ou erradicação das doenças, e fornecendo indicadores para suporte ao planejamento, administração e avaliação das ações de saúde.

Os modelos matemáticos epidemiológicos estão associados ao Cálculo Diferencial e Integral, através das Equações Diferenciais. Nesse contexto foram pesquisados alguns

modelos de previsão, considerando diferentes fatores, como taxas de vacinação, variantes do vírus e medidas de controle, visando associar o conhecimento matemático a estratégias para entender melhor o impacto da pandemia, traduzindo as respostas em números.

Capítulo 1

Introdução

A Epidemiologia é a área da ciência que estuda, quantitativamente, fatores condicionantes e determinantes de doenças em populações humanas e a ocorrência em que esses padrões são determinados. Para Rocha (2012), a prática clínica informa a doença a nível individual, enquanto a Epidemiologia analisa a ocorrência de doenças em massa, ou seja, em sociedades, classes sociais, grupos específicos, entre outros.

Ainda segundo o autor, a Epidemiologia é um estudo que desencadeia diversas funções acerca das doenças, como por exemplo, a atribuição de compreender o processo de disseminação, ou seja, como a doença pode se propagar, além de descobrir de que padecem os indivíduos acometidos, onde e quando. Outra função, seria identificar as causas ou fatores de risco para as doenças, com o intuito de revelar a razão pela qual ela se manifesta de forma diferente em cada indivíduo, não desenvolvendo de maneira uniforme. E por fim, delinear, implementar e avaliar o controle, detenção e programas de prevenção.

A modelação epidemiológica pode desempenhar um papel fundamental na identificação das causas e fatores de risco, e pode ser de grande importância na contribuição de programas de prevenção e avaliação generalizada das doenças acometidas. Sendo assim, compreender apenas o mecanismo de funcionamento das doenças não é suficiente, deve-se ter em conta as adversidades que a doença pode causar. Com isso, a perspectiva de modelar um ponto de vista quantitativo pode ser fundamental para direcionar as decisões futuras sobre vacinas e outras medidas que possam erradicar o problema e garantir uma melhor precisão de combate.

A modelagem epidemiológica associada à utilização de modelagem matemática, desempenha importante função para análise, controle, estimativas entre outros fatores relacionados às doenças epidêmicas. Por isso, a Matemática, quando empregada através de simulações numéricas desses modelos, pode se tornar uma ferramenta útil, fundamentalmente essencial, para construir e testar teorias e conjecturas de avaliações quantitativas. Pois, é através da Matemática que é permitido compreender situações específicas, estimando parâmetros e avaliando a sensibilidade dos modelos e as variações de valores dos

problemas estabelecidos.

Segundo Luiz (2012), os primeiros registros que se tem sobre estudos matemáticos acerca das epidemias aconteceu no século XVI, pelo matemático Daniel Bernoulli (1700-1782), que fez o estudo da propagação da varíola, seguido posteriormente de Hamer, no século XVIII, que analisou casos nos quais a taxa de transmissão da doença ocorria por meio de contato entre indivíduos suscetíveis e indivíduos infectados, conhecido como Lei de Ação das Massas. Na mesma época, Ronald Ross (1857-1932) fez um estudo sobre a malária, para mostrar que sua transmissão se dava pela picada de um mosquito contaminado, e posteriormente, elaborou um modelo matemático mais detalhado para o estudo de tal doença.

Ainda segundo o autor, um dos modelos de maior relevância e influentes no desenvolvimento de modelos matemáticos epidemiológicos foi o modelo SIR (Suscetível - Infectado - Recuperado), estudado por Kermack (1898-1970) e McKendrick (1876-1943), em 1927, os quais concluíram na época, que um número pequeno de indivíduos infectados, mesmo em contato com indivíduos suscetíveis, não gera uma epidemia. Desde então, diversos outros modelos matemáticos em Epidemiologia passaram a ser estudados, alguns destes chamados de modelos compartimentais.

Neste sentido, a modelagem matemática ligada aos estudos epidemiológicos tem como objetivo principal analisar a taxa da força de infecção e a taxa de reprodutibilidade basal, sendo que a força de infecção é a taxa com qual a doença se propaga e vai determinar a dimensão de transmissão, a qual está em função somente do número de indivíduos infectados. Enquanto isso, a outra taxa é o número de infecções causadas em indivíduos suscetíveis a partir de uma primeira infecção, e está totalmente relacionada ao crescimento ou decrescimento da epidemia.

Comumente muitas aplicações das leis fundamentais da Física e das Ciências Sociais envolvem taxas de variação, estudadas na Matemática na área de Cálculo, constituindo assim a essas leis, modelagem por Equações Diferenciais. A modelagem matemática em Epidemiologia é feita através do estudo destas equações, que por sua vez, modelam a interação entre a população e o ambiente, resultando numa análise detalhada a respeito da doença.

A relevância desta investigação se dá ao fato de quanto maior a compreensão acerca das doenças e a maneira em que ela avança, mais eficazes podem ser os métodos para impedir sua transmissão, ou até mesmo desenvolver o estudo de ações preventivas, como, por exemplo, a distribuição de vacinas e ações de cuidados e proteção. Portanto, o objetivo principal deste trabalho é a análise qualitativa de alguns modelos matemáticos epidemiológicos descritos mediante Equações Diferenciais Ordinárias, aplicados à pandemia da COVID-19, nas primeiras 15 semanas do ano de 2021 no estado da Bahia.

1.1 Contexto Histórico das Equações Diferenciais

No final da Idade Média, a Europa se torna um ambiente, segundo Mol (2013), totalmente desfavorável para produção científica, marcado pelas dificuldades, entre elas, a Guerra dos Cem anos, os conflitos militares entre França e Inglaterra e a Grande Peste Bubônica, que em cinco anos dizimou entre 30 e 50 por cento da população europeia. Este panorama sofre uma mudança significativa na história, através do movimento iniciado no século XV conhecido como Renascimento.

Ainda segundo Mol (2013), neste período, o conhecimento passa a ser valorizado e o homem a ser creditado como grande potencial, em contraste com a figura anterior a este movimento, que era visto como impotente, diante da providência divina. O ambiente criativo oriundo do Renascimento associado ao desenvolvimento da ciência lança novos desafios e problemas a serem trabalhados.

O século XVII foi um dos mais importantes períodos para vastos e novos campos da pesquisa matemática. Todas essas atividades intelectuais se deram, em grande parte, aos avanços políticos, econômicos e sociais da época. Este espaço de tempo foi testemunho de grandes produções e pesquisas matemáticas, que por sua vez, próximo ao do final do século, na esteira preparada por vários matemáticos do próprio período, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) contribuíram memoravelmente com a criação do Cálculo (EVES, 2011).

De acordo com Eves (2011), o desenvolvimento do Cálculo, realizado como um campo matemático, passou a ser essencialmente implicado no mundo moderno, de modo a, dificilmente não estar conectado a ele. O autor elucida que, curiosamente, o histórico do Cálculo segue a ordem contrária encontrada nos textos estudados atualmente, evidenciando que primeiro surgiu o Cálculo integral e apenas muito tempo depois o diferencial, sendo a ideia de integração associada a origem de processos somatórios ligados as áreas, volumes, comprimentos e a diferenciação, criada posteriormente, resultado de problemas sobre tangentes, curvas e de questões de máximos e mínimos. Verifica-se assim, mais tarde, que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo uma delas operação inversa da outra.

No campo dos estudos dos cálculos, surgem as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), as quais iniciam pelos próprios criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no final do século XVIII, motivados por problemas físicos, como os pricípios básicos da Mecânica. De acordo com Figueiredo e Neves (2015), a principal preocupação naquela época até meados do século XIX era obter a solução destas equações de forma explícita, e um de seus métodos mais utilizados era a redução do problema através do cálculo das primitivas, sendo chamado de *quadraturas*.

Para Boyce e Diprima (2011), o desenvolvimento das Equações Diferenciais está intimamente ligado ao desenvolvimento geral da Matemática, e além de Newton e Leibniz, houve outros matemáticos que desenvolveram estudos acerca destas equações, os quais

citaremos adiante. Nas explanações, que seguem os próximos tópicos, serão relatados alguns destes matemáticos seguindo a cronologia histórica encontrada na narrativa dos autores citados neste parágrafo. Logo, quando houver fundamentações de outros autores, estas serão citadas.

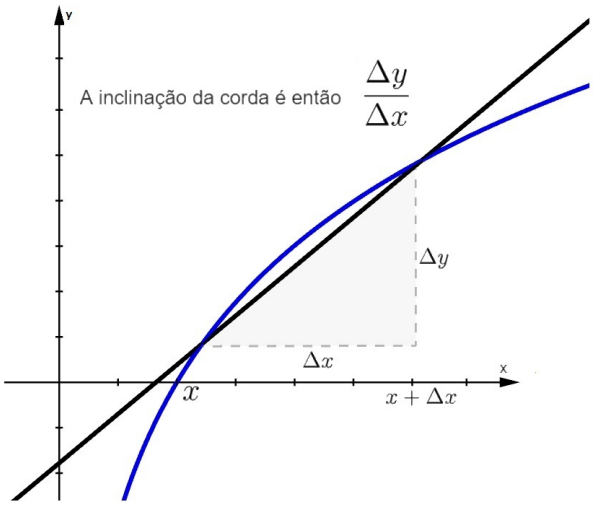
Newton cresceu no interior da Inglaterra, foi educado em Cambridge, e se tornou professor de Matemática em 1669. Suas descobertas sobre o Cálculo datam 1665, circulando de forma privada até 1687, quando apareceu o livro mais famoso, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Newton atuou pouco na área das Equações Diferenciais, entretanto, o seu desenvolvimento do Cálculo e a elucidação dos princípios básicos de Mecânica acabam fornecendo a base para as Equações Diferenciais no século XVIII.

As pesquisas matemáticas de Newton foram finalizadas no início da década de 1690. Newton foi nomeado *Warden of the British Mint* (responsável pela Casa da Moeda britânica), em 1696 pediu demissão da sua posição de professor, e, após sua morte, foi enterrado na capela de Westminster.

Leibniz nasceu na Alemanha, na cidade de Leipzig, e completou seu doutorado em Filosofia na Universidade de Altdorf, ainda com 20 anos. Chegou aos resultados de Cálculo de maneira independente, pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Criou as notações de derivada $\frac{dy}{dx}$, assim como o sinal da integral ($\int$). Descobriu o método de separação de variáveis em 1691, a redução de equações homogêneas no mesmo ano e as técnicas de resolução da equações lineares de primeira ordem em 1694. Passou uma vida como embaixador e conselheiro, o que permitiu ter contato com diversos outros matemáticos, assim como os irmãos Bernoulli.

No que tange a notação no estilo Leibniz, segundo Gonick (2014), é uma notação largamente usada, que enfatiza aspectos da derivada, como sua origem quociente e a variável x da qual está sendo obtida. A notação foi inventada baseada no diagrama Δx, que significa a mudança em x, ou seja, é a variação resultante do valor da função, a saber, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, onde o símbolo Δ (letra grega maiúscula delta) significa "a variação de".

Figura 1.1: Inclinação da corda



Fonte: Autoria própria

Conforme os dados mostrados na Figura 1.1, nesta notação escreveríamos:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Ainda segundo Gonick (2014), Leibniz acreditava que dx e dy eram algum tipo de versão infinitamente pequena de Δx e Δy, e a derivada seria o coeficiente destes "infinitésimos". Embora a ideia tenha sido posteriormente abandonada por alguns matemáticos, segundo o autor é muito útil para os propósitos práticos de soluções, se tornando então uma notação conveniente.

Os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, da Basileia, na Suíça, contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento de métodos para resolver as Equações Diferenciais e ampliar o campo de suas aplicações. Jakob tornou-se professor de Matemática na Basileia, no ano de 1687, e Johann foi nomeado na mesma posição, depois da morte do seu irmão em 1705. A relação estabelecida pelos irmãos era regada de ciúmes e disputas entre si, entretanto fizeram significativas contribuições na área da Matemática.

O problema da *braquistócrona* foi um dos famosos problemas da história da Matemática e consiste em encontrar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza sem atrito em um tempo mínimo de um ponto dado P até o outro ponto Q, onde o segundo ponto está mais baixo do que o primeiro, mas não diretamente debaixo. Este problema foi proposto por Johann Bernoulli, em 1696, como um desafio para os matemáticos da época, que entre os que apresentaram soluções estavam Leibniz, Newton e o Marquês de L'Hospital.

Daniel Bernoulli foi um importante matemático, físico, fisiologista, médico e professor, filho de Johann, emigrou para São Petersburgo - Rússia, para ingressar na Academia de São Petersburgo. Retornou à Basileia em 1733, como professor de Botânica e mais tarde de Física. Seus principais interesses eram nas Equações Diferenciais Parciais e suas aplicações. Seu nome está associado à equação de Bernoulli, em mecânica dos fluidos, e foi o primeiro a encontrar as funções que mais tarde foram conhecidas como as funções de Bessel.

Leonhard Euler (1707-1783), considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII, cresceu próximo à Basileia e foi aluno de Johann Bernoulli e amigo de Daniel Bernoulli. Esteve associado à Academia de São Petersburgo e à Academia de Berlim. Euler foi um dos matemáticos mais prolíficos, chegando a produzir mais de 70 volumes. Seus interesses, além de incluir todas as áreas da Matemática, incluía também, muitos campos de aplicações. Apesar de perder a visão durante os últimos 17 anos de sua vida, Euler continuou produzindo até o dia de sua morte.

Entre todos os trabalhos e pesquisas desenvolvidos por Euler, está o desenvolvimento de métodos para resolver problemas de mecânica, a identificação da condição para que as Equações Diferenciais de primeira ordem sejam exatas, desenvolveu a teoria dos fatores integrantes e a solução geral para as equações lineares homogêneas com coeficientes constantes. Euler utilizou com frequência séries de potências para resolver Equações Diferenciais e fez grandes e importantes contribuições nas Equações Diferenciais Parciais (EDP).

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) tornou-se professor de Matemática aos 19 anos em Turim-Itália, sucedeu Euler na cadeira de Matemática da Academia de Berlim em 1766 e foi para Academia de Paris em 1787. Ficou conhecido pelo seu trabalho *Mécanique analytique*, publicado em 1788, que trata-se de um completo tratado sobre mecânica newtoniana. Entre 1762 e 1765, Lagrange mostrou que a solução geral de uma Equação Diferencial linearmente homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes. Ele ficou conhecido pelo trabalho fundamental que desenvolveu nas Equações Diferenciais Parciais e no Cálculo de variações.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) nasceu na Normandia-França, rapidamente deixou sua marca nas ciências exatas, sendo eleito para Academia de Ciências em 1733. Seu trabalho mais importante foi *Traité de mécanique céleste*, sendo publicado em 5 volumes. A Equação de Laplace é fundamental nas áreas da Física e da Matemática, já que é utilizada como subsídio para o estudo do campo da gravidade e de suas vinculações. A transformada de Laplace recebeu o nome em sua homenagem, embora sua utilização na resolução das Equações Diferenciais aconteceu de forma mais tardia.

No final do século XVIII, muitos métodos elementares de resolução das Equações Diferenciais já tinham sido descobertos. No século XIX iniciaram as investigações de questões teóricas de existência e unicidade, assim como o desenvolvimento de métodos

menos elementares. À medida em que se percebia a fundamental importância das Equações Diferenciais Parciais no campo da Física e da Matemática, os estudos sobre elas foram se tornando mais extensos.

A análise de métodos de investigação numérica por aproximação foi resultado de muitas equações diferenciais que resistiram a métodos analíticos. No início do século XX, já haviam sido desenvolvidos métodos efetivos de integração numérica, mas suas aplicações acabaram sendo prejudicadas pela forma primitiva de resolver, seja por cálculos elaborados manualmente ou através de equipamentos computacionais defasados. Nos últimos 60 anos, com o desenvolvimento da tecnologia, o número de problemas que podem ser investigados de forma mais efetiva, aumentou significativamente. Atualmente existem integradores númericos extremamentes refinados e disponibilizados de forma acessível.

Um importante feito do século XX, acerca das soluções das Equações Diferenciais, foi a implementação de métodos geométricos e topológicos, especialmente para equações lineares. O objetivo destes métodos consiste em compreender o comportamento das soluções, no ponto de vista geométrico e analítico.

Nos últimos anos, com a utilização de programas computacionais e das ferramentas gráficas disponíveis, novos estudos foram estabelecidos sobre as Equações Diferenciais. Atualmente é possível relatar descobertas de fenômenos insperados, como atratores estranhos, caos e fractais, desenvolvendo dessa forma, casos intensamente estudados, que por sua vez, fizeram surgir novas ideias e aplicações. Ainda que as Equações Diferenciais sejam um campo de estudo muito antigo e que muito se saiba sobre ele, atualmente, no século XXI, problemas fascinantes e importantes continuam sem soluções.

1.2 Objetivos

De acordo com Botelho e Cruz (2013), os objetivos de uma pesquisa demonstram quais são as metas que se pretende alcançar. Sendo assim, toda pesquisa científica parte de um problema em questão. Logo, os objetivos podem surgir de acordo com as soluções apresentadas deste problema. Ainda segundo o autor, toda pesquisa é composta por dois tipos de objetivos, sendo eles o geral, no qual é determinado por aquele que se quer alcançar plenamente a solução do problema, e o específico, que por sua vez, trata dos aspectos parciais que devem ser atingidos para que o objetivo geral seja alcançado.

Dessa forma, partindo desta ideia, o problema em questão é analisar os modelos epidemiológicos baseados nas Equações Diferenciais aplicadas a doenças epidêmicas, visando compreender suas implicações na previsão, controle e prevenção de surtos e pandemias, buscando verificar o aprimoramento das estratégias de saúde pública e o bem-estar da população através dos modelos matemáticos.

Deste modo, pretendemos identificar qual a relevância das Equações Diferenciais no contexto pandêmico da COVID-19, em função de sistematizar o desenvolvimento de alguns

casos na Bahia, em níveis de infecção, através dos modelos matemáticos voltados para Epidemiologia, baseado nas Equações Diferenciais.

1.2.1 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos os quais devem oportunizar os aspectos que pretendem ser alcançados para realização do objetivo geral, são:

- Sistematizar conceitos e definições das Equações Diferenciais;
- Abordar os tipos, ordens e linearidade de uma Equação Diferencial;
- Associar os Sistemas de Equações Diferenciais, com os modelos aplicados a Modelagem Epidemiológica;
- Investigar Equações Diferenciais e os modelos matemáticos para epidemias;
- Conceituar e definir Modelagem Matemática;
- Relatar alguns aspectos históricos sobre as Equações Diferenciais;
- Analisar os históricos de picos e equilíbrio da COVID-19 na Bahia, nas 15 primeiras semanas do ano de 2021;
- Exemplificar os modelos epidemiológicos SIS, SIR e SEIHR;
- Modelar dados a níveis de infecção da COVID-19, originados no estado da Bahia, através do modelo matemático epidemiológicos SIR.

Capítulo 2

Metodologia

Apresentam-se aqui os elementos metodológicos utilizados para realização e compreensão da pesquisa descrita. Considerando a estrutura envolvida, a classificação e o tipo da pesquisa, os parágrafos descritos posteriormente configuram-se seguindo uma ordem de apresentação de acordo com as construções elaboradas no corpo do trabalho, já que a organização dos capítulos sugere que diferentes métodos científicos sejam adotados, em função das distintas fontes de pesquisas estabelecidas, como, por exemplo, documental e bibliográfica.

No que concerne aos estudos e abordagens das Equações Diferenciais Ordinárias, Modelagem Matemática Aplicada à Epidemiologia, a pesquisa se configura de natureza aplicada, na qual, segundo Mello, Kaneta e Souza (2013), tem o sentido de gerar soluções ou entender como lidar com um problema. Atribui-se assim, aporte para o planejamento de novas pesquisas ou para a compreensão teórica de certos setores do conhecimento. Os objetivos atribuídos aos seguintes capítulos são de origem exploratória, que por sua vez, ainda segundo o autor, tem como principal finalidade esclarecer concepções e ideias, visando obter maior familiaridade com o problema para torná-lo explícito, geralmente assumindo a forma de pesquisa bibliográfica.

Para Mello, Kaneta e Souza (2013), a pesquisa bibliográfica corresponde ao estudo sistematizado desenvolvido com base em material e dados que já receberam tratamento extensivo, ou seja, documentos de domínio científico. Geralmente, estes têm o objetivo de relacionar características, ideias e conceitos, envolvendo leitura, seleção, fichamento e organização de textos importantes para o estudo em andamento. A busca para construção deste tipo de pesquisa pode ser de forma manual, através de livros ou materiais disponíveis em bibliotecas, ou eletronicamente, em inúmeras ferramentas de buscas que proporcionam este levantamento, como, por exemplo, os periódicos CAPES: http://periodicos.capes.gov.br, Google Acadêmico: http://scholar.google.com.br; SciELO - Scientific Electronic Library Online, entre outras plataformas.

Para Botelho e Cruz (2013), a pesquisa documental é realizada através da coleta, clas-

sificação, seleção e utilização de documentos primários (cartas, atas, registros, jornais, sites governamentais, etc.), ou seja, documentos que não sofreram nenhum tratamento analítico, que servirão de fonte para a coleta de dados. Nestes casos, os conteúdos pesquisados ainda não tiveram nenhum tratamento analítico, são ainda matéria-prima, a partir da qual o pesquisador vai desenvolver sua investigação e análise.

Para Kripka, Scheller e Bonotto (2015), a pesquisa documental e bibliográfica, apesar de se assemelharem, não devem ser confundidas, visto que as fontes de coletas as diferenciam. A documental tem os dados obtidos estritamente provenientes de documentos de fontes rudimentares, com o objetivo de compreender um fenômeno, sendo um procedimento que se utiliza de métodos e técnicas para a apreensão, compreensão e análise de documentos dos mais variados tipos. Entretanto, a pesquisa bibliográfica corresponde a uma modalidade de estudo e de análise de documentos de domínio científico, sendo sua principal finalidade o contato direto com documentos relativos ao tema em estudo.

No que tange parte da coleta de dados acerca da Epidemia do Novo Coronavírus, configura-se em uma pesquisa documental, da qual apresenta características semelhantes às da pesquisa bibliográfica, diferindo no que se refere à fonte dos dados. Posteriormente, neste processo de análise dos estudos procedentes da conexão entre conceitos matemáticos, referente as Equações Diferenciais e a Modelagem Matemática Aplicada à Epidemiologia, iremos associar a pesquisa documental e bibliográfica, na perspectiva de um estudo analítico dos fatos coletados.

2.1 Fonte de Coleta de Dados

A fonte de coletas de dados, como visto no tópico anterior, se originou da coleta e análise de dados científicos e documentais. Para os estudos dos conceitos das Equações Diferenciais Ordinárias, Modelagem Matemática Aplicada à Epidemiologia e a alguns estudos acerca das aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias nas Infecções da COVID-19, foram utilizadas bases de dados nacionais, disponíveis de forma online, Scielo (Scientific Eletronic Library Online), Portal da CAPES, Google Acadêmico/Scholar, filtrados a partir dos respectivos títulos. Outra fonte de pesquisa utilizada foi os materiais bibliográficos, como livros disponibilizados em bibliotecas, contendo definições, principais resultados e aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias.

Dentre os artigos encontrados, foram revisados e filtrados, a partir dos conteúdos, uma lista de pesquisas para a seleção de inclusão no estudo. Com isso, os critérios das opções para a busca de dados da pesquisa foram a apreciação dos títulos científicos identificados, resumos de artigos, teses e textos dos periódicos, livros com conceitos básicos e consolidados, com palavras-chave como: Equações Diferenciais, Modelos Matemáticos, Epidemiologia, Equações Diferenciais Aplicadas à Epidemiologia. As datas do material eletrônico selecionado entre teses e periódicos, para a pesquisa, abrangem o intervalo do

ano de 2010 a 2023.

Já para as coletas de dados acerca da COVID-19, entre os picos de infecções e os períodos de estabilidade do vírus no ano de 2021 no Brasil, foram utilizados sites govenamentais, jornais, meios eletrônicos, sites oficiais, Ministério da Saúde no Brasil e *World Health Organization* (OMS, Organização Mundial da Saúde).

2.2 População e Amostra

A população escolhida para análise de dados foi o estado da Bahia. Localizado na região Nordeste do Brasil, sendo o quinto estado em extensão territorial, com 564.760.427km^2, ocupando 6,6% da área geográfica do país. Sua população representa a quarta maior do país, com uma estimativa de 14.930.634 habitantes, representando 7,1% do total do país (BAHIA, 2021a). De acordo com a divisão político-administrativa, abrange 417 municípios, tendo como capital a cidade de Salvador, situada na macrorregião Leste e que representa 19,3% do total de habitantes do estado (BAHIA, 2017).

Trata-se de um estudo epidemiológico descritivo retrospectivo, realizado a partir de dados secundários extraídos do Boletim Epidemiológico do Estado, publicado no site da Secretaria de Saúde do Estado da Bahia (SESAB). Originados então de documentos oficiais que contêm informações relevantes sobre a situação epidemiológica de toda região.

Os dados foram coletados no dia 19 de Março de 2023. O boletim engloba todas as informações referentes aos casos confirmados, descartados e óbitos. As amostras analisadas foram os boletins referentes à primeira até décima quinta semana do ano de 2021.

2.3 Análise de Dados

Para o método de solução numérica referente ao sistema de equação, foi necessária a criação de uma função própria e os mecanismos de troca da taxa de transmissão da doença β, de modo que fosse possível otimizar tais parâmetros para encaixar a curva reproduzida com os dados dos boletins epidemiológicos do estado da Bahia em Bahia (2021a).

A partir desta solução base, foi possível executar o processo Numérico de Runge-Kutta, alcançando resultados à curva dos resultados numéricos das equações. Estes dados relacionaram as contaminações com as interações em função do tempo e foram renderizados via biblioteca Matplotlib que gerou os gráficos apresentados. Assim, determinamos iterações até encontrar a curva mais próxima possível dos dados reais.

Capítulo 3

Equações Diferenciais

O Cálculo, diferente de uma Matemática estática, é fundamentalmente dinâmico por se tratar de variação e movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Por essa razão ele pode ser útil quando tentamos resolver diversos problemas. Umas das aplicações mais importantes do Cálculo são as Equações Diferenciais, quando são utilizadas pelos físicos e cientistas sociais para analisar um processo de modelagem matemática que se origina das efetivas aplicações das Equações Diferenciais (STEWART, 2009).

A seguir, veremos a base teórica das Equações Diferenciais, bem como sua classificação quanto ao tipo, número de funções incógnitas, ordem, e a linearidade, assim como os métodos de soluções provenientes das suas especificações. As definições e conceitos previstos neste capítulo foram descritas conforme a parte literária encontrada nos autores: Zill e Cullen (2010), Stewart (2009), Boyce e Diprima (2011). Desta forma, quando necessária a citação de diferentes autores, serão estas, sinalizadas no corpo do trabalho no momento conveniente a isto.

3.1 Terminologia e Definições Básicas

Equações Diferenciais são equações que contêm uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. Podemos dizer que, neste caso, as incógnitas destas equações são as funções e suas respectivas derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes. Mais formalmente,

Definição 3.1 (Equação Diferencial)**.** Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial.

Uma função de uma variável real é dada por $y = f(x)$, onde x é a variável independente e y a variável dependente e sua derivada é representada por:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{3.1}$$

Exemplo 3.1.

A derivada de uma função de x pode ser calculada por regras apropriadas vistas no curso de Cálculo Diferencial e ela mesma é uma função de x. Consideremos, por exemplo, $y = e^{x^2}$, então:

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = 2xy. \tag{3.2}$$

No caso das Equações Diferenciais, o problema a ser solucionado é: dada uma equação $\frac{dy}{dx} = 2xy$, encontre uma função $y = f(x)$, que satisfaça a equação. Logo, quando a resolvemos, espera-se que encontremos todas as soluções possíveis e as classifiquem quanto ao Tipo, Ordem e Linearidade que as Equações Diferenciais possuem.

3.1.1 Classificação pelo Tipo

Este tipo de classificação baseia-se em saber se a função desconhecida depende de uma única variável independente ou de diversas variáveis independentes. No primeiro caso, se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO).

Mais formalmente, uma lei que relaciona a variável independente x, a uma função y (variável dependente) e suas sucessivas derivadas $y', y'', \cdots, y^{(n)}$, isto é,

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

é chamada de Equação Diferencial Ordinária de ordem n.

Exemplo 3.2. As equações

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1 \tag{3.3}$$

$$(y - x)dx + 4xdy = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x \tag{3.5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0, \tag{3.6}$$

são Equações Diferenciais Ordinárias. Já uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP).

Exemplo 3.3.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.7}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{3.9}$$

São Equações Diferenciais Parciais. Neste trabalho, limitaremos nosso estudo às Equações Diferenciais Ordinárias.

3.1.2 Classificação pelo Número de Funções Incógnitas

Existem muitos problemas físicos que envolvem diversos elementos separados associados de alguma forma. Por exemplo, circuitos elétricos têm essas características, assim como problemas de mecânica e em outros campos. Nesses e em outros casos semelhantes, o problema matemático correspondente consiste em um sistema de duas ou mais Equações Diferenciais, que podemos classificar enquanto número de funções incógnitas. O número de funções numa Equação Diferencial determina que:

(a) Quando o problema correspondente envolver apenas uma função incógnita, teremos apenas uma única Equação Diferencial, conforme equação (3.10), onde temos um modelo de circuito RC, que trata-se da combinação de resistor e capacitor, de fundamental importância em circuitos eletrônicos, visto em uma Equação Diferencial Ordinária, cuja única função incógnita é $Q = Q(t)$. Além disso, temos que a equação (3.11), é uma equação parcial de Laplace, cuja função incógnita é $u = u(x, y)$,que possui apenas uma função incógnita.

(b) Quando o problema envolver mais de uma função incógnita, teremos um Sistema de Equações Diferenciais, conforme equação (3.12), cujas funções incógnitas são $x(t)$ e $y(t)$.

Exemplo 3.4. São equações com mais de uma Função Incógnitas

$$R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{c}Q = V(t) \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t). \end{cases} \tag{3.12}$$

3.1.3 Classificação pela Ordem

A ordem de uma Equação Diferencial é a ordem da maior derivada que aparece na equação. Por exemplo, quando temos

$$F[t, u(t), u'(t), ..., u^{(n)}(t)] = 0, \tag{3.13}$$

dizemos que esta é uma Equação Diferencial de ordem n. Logo, a equação expressa uma relação entre a variável independente t e os valores da função u e de suas n primeiras derivadas, $u', u'', ..., u^{(n)}$. É conveniente e usual em Equações Diferenciais substituir $u(t)$ por y e $u'(t), u''(t), ..., u^{(n)}(t)$ por $y', y'', ..., y^{(n)}$, assim a equação fica:

$$F(t, y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{3.14}$$

Exemplo 3.5.

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \tag{3.15}$$

é uma Equação Diferencial de terceira ordem, para $y = u(t)$.

Outro tipo de notação que pode ser utilizada nas derivadas é

Exemplo 3.6. Observe as equações a seguir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \tag{3.16}$$

é uma Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem (ou de ordem 2). Sabe-se que a Equação Diferencial (3.4) pode ser escrita na forma

$$4x\frac{dy}{dx} + y = x. \tag{3.17}$$

dividindo pela diferencial dx, trata-se então de uma Equação Diferencial de primeira ordem.

A equação

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3.18}$$

é uma Equação Diferencial Parcial de quarta ordem.

3.1.4 Classificação pela Linearidade

Uma classificação crucial de Equações Diferenciais é se elas são ou não lineares. Uma Equação Diferencial é chamada de **Linear**, quando pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{3.19}$$

As Equações Diferenciais Lineares são caracterizadas por duas propriedades:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvido y é 1.

(ii) Cada coeficiente depende a_j apenas da variável independente x.

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \tag{3.20}$$

A equação 3.20 é uma Equação Diferencial Linear. Uma equação que não é linear é chamada de **não-linear**. As equações

$$yy'' - 2y' = x \tag{3.21}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2y^2 = 0 \tag{3.22}$$

são equações diferencias ordinárias não-lineares de segunda e terceira ordem, respectivamente, em razão do coeficiente depender da variável y e a potência de cada termo ser diferente de 1.

3.2 Soluções

Definição 3.2 (Solução para uma Equação Diferencial)**.** Qualquer função f definida em algum intervalo I, que quando substituída na Equação Diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para equação no intervalo.

Em outras palavras, uma solução para uma Equação Diferencial ordinária

$$F(x, y, y', ..., y^n) = 0 \tag{3.23}$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação, isto é:

$$F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0, \tag{3.24}$$

para todo x no intervalo I. Propositalmente, fica vaga a forma precisa do intervalo I na definição de solução acima. A depender do contexto, I pode representar um intervalo aberto (a, b), um intervalo fechado $[a, b]$, um intervalo infinito $(0, \infty)$ e assim por diante.

Segundo Seco e Patrão (2018), assim como nos métodos para resolver uma Equação Algébrica, os métodos para resolver uma Equação Diferencial Ordinária dependem de sua forma. Sendo assim, existirão meios simples de determinar soluções e técnicas um pouco mais complexas para determinar tais soluções. A solução mais geral possível admitida é denominada solução geral, enquanto que outra solução é chamada de solução particular. Isto acontece quando são dadas condições iniciais para a equação.

Exemplo 3.7. As soluções

1. $y(x) = e^{-x}$ é uma solução particular de $y' + y = 0$.
2. $y(x) = Ce^{-x}$ é uma solução geral de $y' + y = 0$.
3. $y(x) = \operatorname{sen} x$ é uma solução particular de $y'' + y = 0$.
4. $y(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ é a solução geral de $y'' + y = 0$, para todo $A, B \in \mathbb{R}$.

Soluções de algumas equações:

Exemplo 3.8.

Verificar se $y = \dfrac{x^4}{16}$ é uma solução da equação não-linear

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \tag{3.25}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solução: Uma maneira de comprovar se a função dada é uma solução é escrever a Equação Diferencial como

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{3.26}$$

e verificar, após a substituição, se a diferença acima é zero para todo x no intervalo. Usando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{16} = \frac{x^3}{4} \quad \text{e} \quad y^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}. \tag{3.27}$$

Percebemos que:

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0 \tag{3.28}$$

para todo número real. Logo $y = \dfrac{x^4}{16}$ é solução da equação dada.

Exemplo 3.9.

A função $y = xe^x$ é uma solução para a Equação Linear

$$y'' - 2y' + y = 0 \tag{3.29}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$. Para verificar isso, calculamos

$$y' = xe^x + e^x \quad \text{e} \quad y'' = xe^x + 2e^x. \tag{3.30}$$

Observe que

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0 \tag{3.31}$$

para todo número real.

Nos Exemplos 3.8 e 3.9, a função constante $y = 0$ também satisfaz a Equação Diferencial, para todo x real. Uma solução identicamente nula em um intervalo I é em geral referida como **solução trivial**.

3.2.1 Soluções Explícitas e Implícitas

Soluções de Equações Diferenciais são divididas em explícitas e implícitas. Uma solução que pode ser escrita na forma $y = f(x)$ é chamada de **solução explícita**. Nos exemplos anteriores 3.8 e 3.9, $y = \dfrac{x^4}{16}$ e $y = xe^x$ são soluções explícitas de $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ e $y'' - 2y' + y = 0$, respectivamente. Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma Equação Diferencial ordinária em um intervalo I, se ela define uma ou mais soluções explícitas em I.

Exemplo 3.10.

Para $-2 < x < 2$, a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para Equação Diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{3.32}$$

Segue, por derivação implícita, que

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 0 \tag{3.33}$$

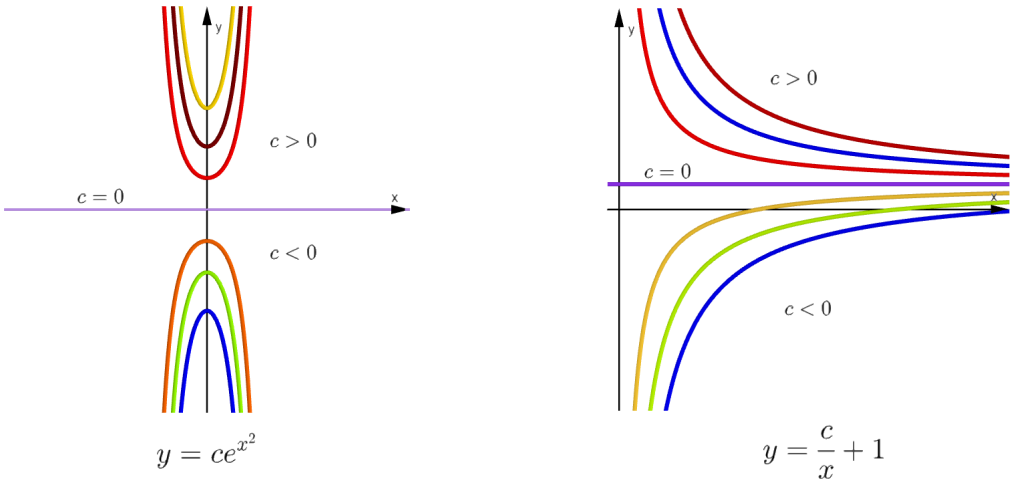
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ no Exemplo 3.10 define duas funções diferenciais explícitas: $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $(-2, 2)$. Além disso, note que qualquer relação da forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisfaz, formalmente, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ para qualquer constante c. Porém a relação deve sempre fazer sentido nos números reais.

3.2.2 Número de Soluções

As soluções de uma Equação Diferencial geralmente possui um número infinito de soluções, correspondente a escolhas de parâmetros ilimitados. Uma solução de uma Equação Diferencial que não possui parâmetros arbitrários é chamada de solução particular. Por exemplo, podemos mostrar que, por substituição direta, qualquer função da família de parâmetro único $y = ce^{x^2}$, em que c é uma constante arbitrária, também satisfaz a equação (3.2), como mostra a figura 3.1 em (a), apresentando famílias de soluções para valores arbitrários de $c = 0$, $c > 0$ e $c < 0$. Indicamos também que no Exemplo 3.9, podemos verificar por substituição que $y = cxe^x$ é uma família de soluções da Equação Diferencial dada.

Figura 3.1: Família de Soluções



Fonte: Autoria própria

Exemplo 3.11.

Para qualquer valor de c, a função $y = \frac{c}{x} + 1$ é uma solução da Equação Diferencial de primeira ordem

$$x\frac{dy}{dx} + y = 1 \tag{3.34}$$

no intervalo $(0, \infty)$. Temos,

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{d}{dx}(x^{-1}) + \frac{d}{dx}(1) = -cx^{-2} = -\frac{c}{x^2}, \tag{3.35}$$

então,

$$x\frac{dy}{dx} + y = x\left(-\frac{c}{x^2}\right) + \left(\frac{c}{x} + 1\right) = 1. \tag{3.36}$$

Variando o parâmetro c, podemos gerar uma infinidade de soluções. Em particular, fazendo $c = 0$, obtemos uma constante $y = 1$, como mostra o gráfico correspondente à função na Figura 3.1 em (b).

No Exemplo 3.11, $y = \frac{c}{x} + 1$ é uma solução da Equação Diferencial em qualquer intervalo que não contenha a origem, pois a função não é diferenciável em $x = 0$.

Neste caso, uma solução para uma Equação Diferencial que não depende de parâmetros arbitrários é chamada de solução particular, sendo que uma das formas de obter uma solução particular é escolhendo valores específicos para os parâmetros na família de soluções.

3.2.3 Uma Família a $n-$parâmetros de Soluções

A solução geral para a EDO de ordem n

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{3.37}$$

é uma função que possui n constantes $c_1, c_2, ..., c_n$, que chamamos de **parâmetros**. Portanto a solução geral da EDO de ordem n é uma família a n **-parâmetros de soluções** (na forma explícita ou implícita) que contém todas as soluções possíveis em um intervalo I.

Exemplo 3.12.

Mostre que $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}$ é uma família a 2-parâmetros de soluções de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0 \tag{3.38}$$

e ache a solução particular que satisfaça a condição $y = 1 = \frac{dy}{dx}$ quando $x = 0$.

Solução:

Se $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}$, então $\frac{dy}{dx} = c_1e^x - 2c_2e^{-2x}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = c_1e^x + 4c_2e^{-2x}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y &= (c_1e^x + 4c_2e^{-2x}) + (c_1e^x - 2c_2e^{-2x}) - 2(c_1e^x + c_2e^{-2x}) \\ &= c_1e^x + 4c_2e^{-2x} + c_1e^x - 2c_2e^{-2x} - 2c_1e^x - 2c_2e^{-2x} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}$ é uma família a 2-parâmetros de soluções da Equação Diferencial.

Se $y = 1 = \frac{dy}{dx}$ quando $x = 0$, temos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases}. \tag{3.39}$$

Resolvendo temos $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Portanto a solução particular é $y = e^x$.

3.2.4 Solução de Equação Diferencial Ordinária de Ordem n

Se uma EDO de ordem n é da forma

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x), \tag{3.40}$$

então sua solução geral é obtida de uma maneira direta, por integrações (sucessivas).

Exemplo 3.13.

Ache a solução geral da Equação Diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}x + 3x. \tag{3.41}$$

Solução: Fazemos

$$dy = (3x - \operatorname{sen}x)dx \tag{3.42}$$

e integramos ambos os lados da igualdade, obtendo

$$\begin{aligned} \int dy &= \int (3x - \operatorname{sen} x)dx \\ y &= \frac{3x^2}{2} + \cos x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Portanto, a solução geral é $y = \dfrac{3x^2}{2} + \cos x + c_1$.

Exemplo 3.14.

Encontre a solução geral da Equação Diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5x^4 - \frac{1}{x}. \tag{3.44}$$

Solução: Fazemos,

$$d^2y = \left(5x^4 - \frac{1}{x}\right) dx^2 \tag{3.45}$$

e integramos ambos os lados da igualdade,

$$\begin{aligned} \int d^2y &= \int \left(5x^4 - \frac{1}{x}\right) dx^2 \\ \int dy &= \int (x^5 - \ln x + c_1)dx \\ y &= \frac{x^6}{6} - x\ln x + x + xc_1 + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Portanto, a solução geral é $y = \dfrac{x^6}{6} - x\ln x + xc_0 + c_2$, onde $c_0 = (c_1 - 1)$.

3.3 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

A fim de encontrar algumas soluções das Equações Diferenciais de Primeira Ordem, precisamos utilizar algumas técnicas e métodos para resolvê-las, os quais serão definidos pelo tipo e classificação. Durante muitos anos, muitos matemáticos se esforçaram para resolver diversos tipos particulares de equação, por isso, há vários métodos de soluções.

Os métodos e as técnicas utilizadas em uma dada equação, muitas vezes não se aplicam necessariamente a outros tipos. Logo, nesta seção veremos alguns métodos dos principais tipos de aplicações de soluções nas Equações Diferenciais de primeira ordem.

3.3.1 Problema de Valor Inicial (PVI)

Ao resolver uma Equação Diferencial de primeira ordem, no contexto em que supomos uma Equação Diferencial $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ que pode ser colocada na forma $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{n-1})$. Seja

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 peretence a um inetervalo I e y_0 é um número real e arbitrário. O problema

$$\textit{Resolva:} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\textit{Sujeito a:} \quad y(x_0) = y_0$$

Notação:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.47}$$

é chamado de **problema de valor inicial**. Em termos geométricos, estamos procurando uma solução particular para a Equação Diferencial definida em algum intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado.

Exemplo 3.15.

Resolva o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 6x^2 - 1 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases} . \tag{3.48}$$

Solução: Dada a equação, $\dfrac{dy}{dx} - 6x^2 - 1 = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 6x^2 + 1 \\ dy &= (6x^2 + 1)dx \\ \int dy &= \int (6x^2 + 1)dx \\ y &= 2x^3 + x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Encontrada a solução geral da equação, $y = 2x^3 + x + c_1$, vamos determinar a solução particular no ponto $y(1) = 2$, substituindo os valores na equação:

$$\begin{aligned} y &= 2x^3 + x + c_1 \\ 2 &= 2(1)^3 + 1 + c_1 \\ 2 &= 2 + 1 + c_1 \\ 2 - 3 &= c_1 \\ c_1 &= -1. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Portanto a solução particular da equação é $y = 2x^3 + x - 1$.

3.3.2 Existência e Unicidade de Solução para EDO

De acordo com Sodré (2003), quatro importantes questionamentos acerca das EDO são:

1. Dada uma Equação Diferencial, será que ela tem solução?

2. Caso tenha solução, esta solução é única?

3. Existe uma solução que satisfaça alguma condição especial?

4. Sob que condições podemos garantir que existe uma solução do PVI?

Para ele, as respostas destas perguntas estão garantidas com o Teorema de Existência e Unicidade de solução. Yartey e Ribeiro (2017), apresentam o teorema que determina a existência de uma Equação Diferencial, seguido do teorema de unicidade, o qual veremos a seguir.

Teorema 3.3.1 (Existência)**.** *Suponha que $f(x, y)$ é contínua num retângulo*

$$R = \{(x, y) : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

centrado em (x_0, y_0). Então existe um número h_1 (possivelmente menor que h) tal que uma solução $y = \phi(x)$ de (3.47) é definida no intervalo $(x_0 - h_1, x_0 + h_1)$.

Teorema 3.3.2 (Unicidade)**.** *Suponha que $f(x, y)$ e sua derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ sejam contínuas num retângulo R como no Teorema 3.3.1. Então existe um número h_2 (possivelmente menor que h_1) tal que uma solução $y = \phi(x)$ de (3.47), cuja a existência é garantida pelo Teorema 3.3.1, é a única solução da equação definida no intervalo $(x_0 - h_2, x_0 + h_2)$.*

Exemplo 3.16.

Considere o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \\ y(1) = 0 \end{cases} . \tag{3.51}$$

Verifique se a existência e unicidade de soluções estão garantidas. **Solução:** Analisando a função e sua derivada no ponto $y(1) = 0$:

$$f(x, y) = -\frac{x}{y} \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y^2}. \tag{3.53}$$

Observe que as funções (3.52) e (3.53) não são contínuas no ponto $y(1) = 0$, pois não são definidas nestes pontos. Então os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2 podem não ser usados para analisar a existência e unicidade de um PVI.

Observação 3.1. *A relação $x^2 + y^2 = 1$ satisfaz o PVI (3.51), mas não é uma solução no sentido do Teorema 3.3.1. Recorde que uma solução deve ser definida num intervalo que contém a coordenada x_0 do valor inicial. Contudo y é definida implicitamente em $x = 1$, mas não no intervalo em torno de $x = 1$. De fato, o PVI possui duas soluções $\phi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $\phi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.*

Exemplo 3.17.

Considere o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 1}{2y - 4} \\ y(0) = -2 \end{cases} . \tag{3.54}$$

Verifique que a existência e a unicidade de soluções estão garantidas. **Solução:** Colocando a equação deferencial dada na forma exigida pelos Teoremas 3.3.1 e 3.3.2, temos:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{3x^2 + 1}{2y - 4}. \tag{3.55}$$

Analisaremos a função e sua derivada em $y(0) = -2$:

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 1}{2y - 4} \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 1}{2(y - 2)^2}. \tag{3.57}$$

Observe que a função f e a sua derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são continuas em $y(0) = -2$.

Solução: Encontrando a solução geral para esta equação, separando as equações teremos,

$$\begin{aligned} (2y - 4)dy &= (3x^2 + 1)dx \\ \int (2y - 4)dy &= \int (3x^2 + 1)dx \\ y^2 - 4y + 4 &= x^3 + x + 4 + c_1 \\ (y - 2)^2 &= x^3 + x + 4 + c_1 \\ y &= 2 \pm \sqrt{x^3 + x + 4 + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Portanto, a solução geral da equação é

$$y = 2 + \sqrt{x^3 + x + 4 + c_1} \quad \text{e} \quad y = 2 - \sqrt{x^3 + x + 4 + c_1}.$$

Solução do PVI

Para $y = 2 - \sqrt{x^3 + x + 4 + c_1}$,

$$\begin{aligned} -2 &= 2 - \sqrt{(0)^3 + 0 + 4 + c_1} \\ -4 &= -\sqrt{4 + c_1} \\ 16 &= 4 + c_1 \\ c_1 &= 12. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Para $y = 2 + \sqrt{x^3 + x + 4 + c_1}$,

$$\begin{aligned} -2 &= 2 + \sqrt{(0)^3 + 0 + 4 + c_1} \\ -4 &= \sqrt{4 + c_1}, \end{aligned} \tag{3.60}$$

não possui solução.
Portanto, a solução particular que satisfaz $y(0) = -2$ é $y = 2 - \sqrt{x^3 + x + 16}$.

Façamos o Exemplo 3.17 com a condição inicial modificada para $y(0) = 2$. Analisando a função e sua derivada em $y(0) = 2$, temos

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 1}{2y - 4} \tag{3.61}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^2 + 1}{2(y - 2)^2}. \tag{3.62}$$

Observe que a função f e a sua derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sequer existem em $y(0) = 2$, portanto não é possível garantir uma solução única.

Solução do PVI

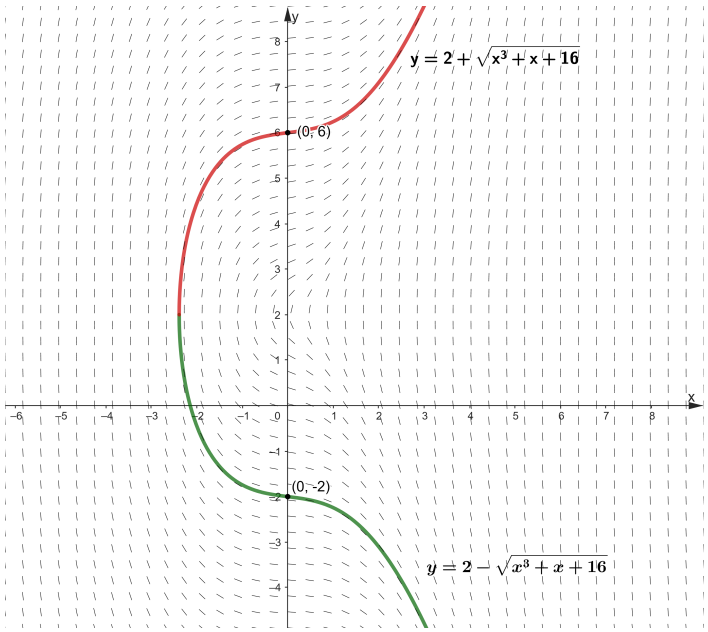
Mantendo a solução geral $y = 2 \pm \sqrt{x^3 + x + 4 + c_1}$, para $y(0) = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \pm \sqrt{2(0)^3 + 0 + 4 + c_1} \\ 0 &= \pm\sqrt{4 + c_1} \\ 0 &= 4 + c_1 \\ c_1 &= -4. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Portanto as soluções que satisfazem $y(0) = 2$, são,

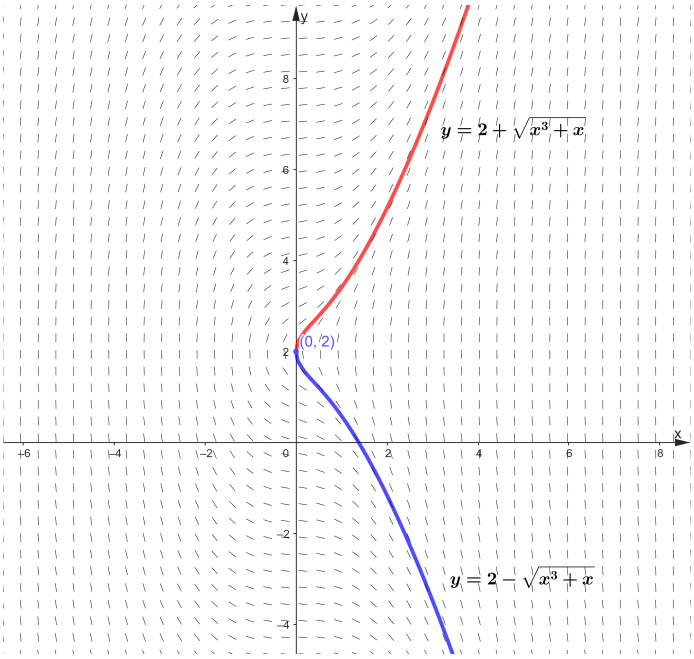
$$y = 2 + \sqrt{x^3 + x} \quad \text{e} \quad y = 2 - \sqrt{x^3 + x}.$$

Figura 3.2: Campos de direção da função (3.56): soluções para o ponto $y(0) = -2$



Fonte: Autoria própria

Figura 3.3: Campos de direção da função (3.56): soluções para o ponto $y(0) = 2$



Fonte: Autoria própria

3.3.3 Variáveis Separáveis

Definição 3.3 (Equação Separável)**.** Uma Equação Diferencial na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{3.64}$$

é chamada de equação **separável** ou que tem **variáveis separáveis**. Pode ser escrita na forma

$$h(y)dy = g(x)dx. \tag{3.65}$$

Método de Solução

Utilizando a equação (3.65), vamos integrar ambos os lados, indicando o procedimento de resolução das Equações Diferenciais Separáveis,

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx. \tag{3.66}$$

Uma família a um parâmetro de soluções é obtida integrando ambos os lados de $h(y)dy$ e $g(x)dx$, podendo reduzir a uma única constante de integração em que c é completamente arbitrária. Por exemplo, múltiplos de constantes ou combinações de constantes podem ser trocadas a uma única constante:

$$\begin{aligned} \int h(y)dy + c_1 &= \int g(x)dx + c_2 \\ \int h(y)dy &= \int g(x)dx + c_2 - c_1 \\ \int h(y)dy &= \int g(x)dx + c. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Exemplo 3.18.

Resolva

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x + 6.$$

Podemos escrever

$$dy = \left(\frac{x+6}{x+1}\right)dx. \tag{3.68}$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} \int dy &= \int \left(\frac{x+6}{x+1}\right)dx \\ y &= x + 5\ln|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Portanto, a solução geral da equação é $y = x + 5\ln|x+1| + c$.

3.3.4 Equações Homogêneas

Antes de definir uma Equação Diferencial Homogênea de primeira ordem e seu método de solução, vamos examinar a natureza de uma função homogênea.

Definição 3.4 (Função Homogênea)**.** Se uma função f satisfaz

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \tag{3.70}$$

para algum número real n, então dizemos que f é uma **função homogênea de grau n**.

Exemplo 3.19.

(a)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + 3xy + y^2 \\ f(tx, ty) &= (tx)^2 + 3(tx)(ty) + (ty)^2 \\ &= t^2x^2 + 3t^2xy + t^2y^2 \\ &= t^2[x^2 + 3xy + y^2] = t^2 f(x, y) \end{aligned} \tag{3.71}$$

é uma função é homogênea de grau dois.

(b)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt[3]{x^2 + y^2} \\ f(tx, ty) &= \sqrt[3]{t^2x^2 + t^2y^2} = t^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x^2 + y^2} \\ &= t^{\frac{2}{3}} f(x, y) \end{aligned} \tag{3.72}$$

é uma funão homogênea de grau $\dfrac{2}{3}$.

(c)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 + y^3 + 1 \\ f(tx, ty) &= t^3x^3 + t^3y^3 + 1 \neq t^3 f(x, y) \end{aligned} \tag{3.73}$$

pois $t^3 f(x, y) = t^3x^3 + t^3y^3 + t^3$. Neste caso, a função não é homogênea.

(d)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x}{2y} + 4 \\ f(tx, ty) &= \frac{tx}{2ty} + 4 = \frac{x}{2y} + 4 = t^0 f(x, y), \end{aligned} \tag{3.74}$$

é uma função homogênea de grau zero.

Na equação (3.73) a constante adcionada à função invalida a homogeneidade. Já em (3.74), a constante adcionada a função torna-a homogênea de grau zero. A função pode ser reconhecida homogênea examinando o grau de cada termo.

Para uma função ser homogênea, os graus dos termos da equação precisam ser iguais. Sendo $f(x, y)$ uma função homogênea de grau n, note que podemos escrever

$$f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad y^n f(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, 1\right), \tag{3.75}$$

em que $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ e $f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ são ambas homogêneas de grau zero.

Exemplo 3.20.

Vimos que $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ é homogênea de grau dois. Logo,

$$f(x, y) = x^2\left[1 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = x^2 f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{3.76}$$

$$f(x, y) = y^2\left[1 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = y^2 f\left(\frac{x}{y}, 1\right). \tag{3.77}$$

Definição 3.5 (Equação Homogênea)**.** Uma Equação Diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3.78}$$

é chamada de **homogênea** se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas de mesmo grau.

Ou seja, a equação $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, é homogênea se,

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y) \quad \text{e} \quad N(tx, ty) = t^n N(x, y), \text{ para algum } n \in \mathbb{N}. \tag{3.79}$$

Método de Solução

Uma Equação Diferencial Homogênea $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ pode ser resolvida por meio de uma substituição algébrica. Especificamente, a substituição $y = ux$ ou $x = vy$, em que u e v são as novas variáveis independentes, transformará a equação em uma Equação Diferencial de primeira ordem separável. Para isso, seja $y = ux$; então temos que $dy = udx + xdu$. Substituindo em (3.78), temos

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)[udx + xdu] = 0. \tag{3.80}$$

Pela propriedade de homogeneidade dada em (3.75), podemos escrever

$$x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)[udx + xdu] = 0 \tag{3.81}$$

ou

$$[M(1,u) + uN(1,u)]dx + xN(1,u)du = 0. \tag{3.82}$$

Assim,

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} = 0. \tag{3.83}$$

Exemplo 3.21.

Encontre a solução da Equação Diferencial

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0. \tag{3.84}$$

Solução: Tanto $M(x,y)$ quanto $N(x,y)$ são homogêneas de grau dois. Se fizermos $y = ux$, temos $dy = [udx + xdu]$. Logo

$$\begin{aligned} (x^2 + u^2x^2)dx + (x^2 - ux^2)[udx + xdu] &= 0 \\ x^2dx + u^2x^2dx + x^2udx + x^3du - x^2u^2dx - x^3udu &= 0 \\ x^2(1+u)dx + x^3(1-u)du &= 0 \\ \frac{dx}{x} &= -\left(\frac{1-u}{1+u}\right)du. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Integrando ambos os dados da equação, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= -\int \left(\frac{1-u}{1+u}\right)du \\ \ln|\,x\,| &= -2\ln|\,1+u\,| + u + c. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Substituindo u por $\dfrac{y}{x}$, obtemos

$$\ln|\,x\,| = -2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \frac{y}{x} + c. \tag{3.87}$$

Aplicando as propriedades de logaritmo, podemos escrever

$$\ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x}. \tag{3.88}$$

A definição de logaritmo implica

$$(x+y)^2 = c_1 x e^{\frac{y}{x}}. \tag{3.89}$$

3.3.5 Equações Exatas

Nesta seção vamos considerar uma classe de equações conhecidas como equações exatas, para as quais também existe um método bem definido de solução.

Definição 3.6 (Equação Exata)**.** Uma expressão diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.90}$$

é uma **diferencial exata** em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x,y)$. Uma Equação Diferencial na forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.91}$$

é chamada de uma **equação exata** se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.

Do Cálculo Diferencial para funções de duas variáveis, temos o conceito de diferencial total ou simplesmente diferencial, que iremos relembrar, abaixo:

Definição 3.7. Dada a função de duas variáveis $z = f(x,y)$, definimos sua diferencial total por:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{3.92}$$

Desse modo, dizemos que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata, se existir uma função $z = f(x,y)$ tal que,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy, \tag{3.93}$$

ou seja, tal que,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = M(x,y) \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = N(x,y). \tag{3.94}$$

Exemplo 3.22.

Resolva a Equação Diferencial

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0. \tag{3.95}$$

A equação não é linear, homogênea e nem separável, de modo que não podemos aplicar os métodos conhecidos anteriormente para esse tipo de equação. Entretanto note que a função $\psi(x,y) = x^2 + xy^2$, tem a propriedade que

$$2x + y^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{e} \quad 2xy = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{3.96}$$

Portanto, a Equação Diferencial pode ser escrita como

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' = 0 \tag{3.97}$$

Supondo que y é uma função de x e usando a regra da cadeia, podemos escrever a equação (3.97) na forma equivalente

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0 \tag{3.98}$$

Portanto,

$$\psi(x, y) = x^2 + xy^2 = c \tag{3.99}$$

Neste caso, c é uma constante arbitrária, (3.99) é uma equação que define as soluções da equação (3.95) implicitamente.

Ao resolver a equação (3.95), o passo chave foi o reconhecimento de que existe uma função ψ que satisfaz a equação (3.96). Mais geralmente, considere a Equação Diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \tag{3.100}$$

Suponha que podemos identificar uma função ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \tag{3.101}$$

e tal que $\psi(x, y) = c$ define $y = \phi(x)$ implicitamente como uma função diferenciável de x. Então

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)], \tag{3.102}$$

e a Equação Diferencial (3.100) fica

$$\frac{d}{dx}\psi[x, \phi] = 0. \tag{3.103}$$

Neste caso, a equação (3.100) é dita uma Equação Diferencial **Exata**. Soluções da Equação (3.100), ou da equação equivalente (3.103), são dadas implitamente por

$$\psi(x, y) = c, \tag{3.104}$$

onde c é uma constante abitrária.

No Exemplo 3.22 foi relativamente fácil ver que a Equação Diferencial era exata e, de fato, foi fácil encontrar a solução desjada ψ. Para algumas equações mais complexas pode não ser possível tão facilmente, para isso, veremos a seguir um teorema que fornece um modo sistemático de determinar se uma Equação Diferencial é exata.

Teorema 3.3.3 (Critério para uma Diferencial Exata)**.** *Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Então uma condição necessária e suficiente para que*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3.105}$$

seja uma Equação Diferencial exata é que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.106}$$

Prova. **Condição necessária:** Por hipótese, a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata. Então existe uma função ψ no retângulo dado, tal que

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{3.107}$$

Assim,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) \quad e \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y). \tag{3.108}$$

Daí, derivando parcialmente de novo, obtemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{3.109}$$

Como as derivadas são contínuas, por hipótese, segue do Teorema de Schwarz, que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.110}$$

Condição suficiente: Sabemos, agora, que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Queremos mostrar que a EDO $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata. Para isso, devemos mostrar que existe uma função ψ, tal que a sua diferencial total seja a equação dada, isto é, tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M \quad e \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N. \tag{3.111}$$

Daí, integrando $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y)$, com relação à variável x, obtemos

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y). \tag{3.112}$$

Derivando esta expressão com relação a y e confrontando com $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = N$, temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + g'(y) = N(x,y). \tag{3.113}$$

Isolando $g'(y)$ e integrando com respito a y, temos que a função esperada é dada por

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + \int g'(y)dy. \tag{3.114}$$

□

Vamos utilizar o critério para mostrar que a EDO é exata, no exemplo seguinte:

Exemplo 3.23.

Seja a equação

$$2x^3\,\mathrm{sen}(y^2)dx + x^4 y\cos(y^2)dy = 0. \tag{3.115}$$

Sendo $M(x,y) = 2x^3\,\mathrm{sen}(y^2)$ e $N(x,y) = x^4 y\cos(y^2)$, perceba que derivando as funções, teremos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 y\cos(y^2). \tag{3.116}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x^3 y\cos(y^2). \tag{3.117}$$

Note então, que neste caso temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.118}$$

Portanto a equação (3.115) é uma diferencial exata.

Método de Solução das Equações Diferenciais Exatas

Seja a equação

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{3.119}$$

Mostre primeiro que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.120}$$

Depois suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y). \tag{3.121}$$

Daí, podemos podemos encontrar f integrando $M(x,y)$ com relação a x, considerando y constante. Escrevemos

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y), \tag{3.122}$$

em que a função $g(y)$ é a constante de integração. Agora, derivando (3.122) com relação a y e supondo $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + g'(y) = N(x,y). \tag{3.123}$$

Assim,

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx. \tag{3.124}$$

Finalmente integre (3.124) com relação a y e substitua o resultado em (3.122). A solução é $f(x,y) = c$.

Observação 3.2.

Algumas observações são importantes e necessárias. Primeiro, é importante perceber que a expressão

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \tag{3.125}$$

é independente de x, pois

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right)\\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.\end{aligned} \tag{3.126}$$

Segundo, poderíamos também iniciar o procedimento acima com a suposição de que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$. Depois integrando N com relação a y e derivando o resultado com respeito a x, encontramos o análogo de (3.122) e (3.124), que seria, respectivamente,

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x) \quad e \quad h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy. \tag{3.127}$$

Em qualquer caso, *nenhuma destas fórmulas deve ser memorizada.* Para verificação de uma equação exata ou não, deve-se assegurar que ela esteja na forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Exemplo 3.24.

Resolva

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0. \tag{3.128}$$

Solução: Com $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = x^2 - 1$, derivando temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x. \tag{3.129}$$

Logo,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.130}$$

Então, fazendo $f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$, onde $g(y)$, que representa a constante de integração, neste caso teremos

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \int 2xydx\\ f(x,y) &= x^2y + g(y).\end{aligned} \tag{3.131}$$

Derivando a última expressão com relação a y e igualando o resultado a $N(x, y)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \\ g'(y) &= -1 \\ g(y) &= -y + c_1. \end{aligned} \tag{3.132}$$

Substituindo $g(y)$ na equação final de (3.131), teremos $f(x, y) = x^2y - y + c_1$, ou seja, como $f(x, y) = c$, a equação geral é $c_2 = x^2y - y$, com $c_2 = -c_1$.

Exemplo 3.25.

Resolva

$$\cos(x + y)dx + (3y^2 + 2y + \cos(x + y))dy = 0 \tag{3.133}$$

Solução: Neste caso, tomamos $M(x, y) = \cos(x + y)dx$ e $N(x, y) = (3y^2+2y+\cos(x + y))$ e fazemos a derivação para verificar se trata-se de uma Equação Diferencial Exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\operatorname{sen}(x + y) \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x + y). \tag{3.134}$$

Portanto é uma Equação Diferencial Exata, já que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.135}$$

Sendo $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$, fazemos a integração de ambos os lados com respeito a x, obtendo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \cos(x + y)dx \\ f(x, y) &= \operatorname{sen}(x + y) + g(y). \end{aligned} \tag{3.136}$$

Sendo $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(x + y) + g'(y) \\ g'(y) &= N(x, y) - \cos(x + y) \\ g'(y) &= 3y^2 + 2y + \cos(x + y) - \cos(x + y) \\ g'(y) &= 3y^2 + 2y. \end{aligned} \tag{3.137}$$

Integrando ambos os lados com respeito a y, obtemos

$$\begin{aligned} \int g'(y) &= \int (3y^2 + 2y)dy \\ g(y) &= y^3 + y^2 + c_1. \end{aligned} \tag{3.138}$$

Substituindo $g(y)$ na equação final de (3.136), teremos $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) + y^3 + y^2 + c_1$, ou seja, como $f(x, y) = c$, a equação geral é $c_2 = \operatorname{sen}(x + y) + y^3 + y^2$, com $c_2 = -c_1$.

Sabemos que nem todas as Equações Diferenciais são exatas, todavia, existe uma função chamada fator de integração, que torna um EDO não exata numa EDO exata. Vejamos:

Definição 3.8. Uma função $\mu(x, y)$ é um fator de integração para a EDO

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

se a equação

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

for uma EDO exata.

Vale ressaltar que, o fator de integração é eficiente se ele for apenas função de x ou apenas função de y. Deste modo, não é tão simples encontrar um fator de integração, todavia, neste trabalho ele será utilizado para resolver EDO lineares de primeira ordem, que neste caso, conseguimos encontrar uma fórmula que funciona muito bem, devido às características da equação linear. Veremos isto na próxima subseção.

3.3.6 Equações Lineares

Na Subseção 3.1.4, definimos em (3.19) a forma geral para uma Equação Diferencial Linear de ordem n, onde a linearidade significa que todos os coeficientes são funções de x somente e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Agora, quando $n = 1$, obtemos uma equação linear de primeira ordem.

Definição 3.9 (Equação Linear)**.** Uma Equação Diferencial da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{3.139}$$

é chamada de **equação linear**.

Dividindo pelo coeficiente $a_1(x)$, obtemos uma forma mais útil de equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{3.140}$$

Procuramos neste caso, uma solução para (3.140), em um intervalo I no qual as funções $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas. A seguir, supomos que (3.140) possui uma solução.

Fator de integração

Usando diferenciais, podemos escrever a equação (3.140) como

$$dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0. \tag{3.141}$$

Equações linares possuem a agradável propriedade através da qual podemos sempre encontrar uma função $\mu(x)$ em que

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0 \tag{3.142}$$

é uma Equação Diferencial Exata. Pelo Teorema 3.3.3, o lado esquerdo da equação (3.142) é uma Equação Diferencial Exata se

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)] \quad \text{ou} \quad \frac{d\mu}{dx} = \mu P(x). \tag{3.143}$$

Esta é uma equação separável em que podemos determinar $\mu(x)$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{\mu} &= P(x)dx \\ \ln|\mu| &= \int P(x)dx, \end{aligned} \tag{3.144}$$

assim

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \tag{3.145}$$

A função $\mu(x)$ definida em (3.145) é um **fator integrante** para equação linear. Perceba que não precisamos usar uma constante de integração em (3.144), pois (3.142) não se altera se a multiplicarmos por uma constante. Ainda $\mu(x) \neq 0$ para todo x em I, e é contínua e diferenciável.

Observe que a equação (3.142) é ainda uma Equação Diferencial Exata, mesmo quando $f(x) = 0$. Neste caso, $f(x)$ não desempenha papel algum na determinação de $\mu(x)$, pois observamos em (3.143) que $\dfrac{\partial}{\partial y}\mu(x)f(x) = 0$. Logo ambas,

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}[P(x) - f(x)]dx \quad \text{e} \quad e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)ydx, \tag{3.146}$$

são diferenciais exatas. Agora escrevemos (3.142) na forma

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)ydx = e^{\int P(x)dx}f(x)dx \tag{3.147}$$

e verificamos que podemos escrevê-la como:

$$d[e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}f(x)dx. \tag{3.148}$$

Integrando a última equação com respeito a y, temos:

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}f(x)dx + c \quad \text{ou} \quad y = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx + ce^{-\int P(x)dx}. \tag{3.149}$$

Em outras palavras, se (3.140) tiver solução, ela deverá ser da forma (3.149). Reciprocamente, podemos ver que (3.149) constitui uma família a um parâmetro de soluções para Equação (3.140).

Resumo do Método

Resolvendo uma equação linear de primeira ordem

(i) Para resolver uma equação linear de primeira ordem, primeiro coloque-a na forma (3.140);

(ii) Indentifique $P(x)$ e encontre o fator de integração:

$$e^{\int P(x)dx}.$$

(iii) Multiplique a equação obtida em (i) pelo fator de integração:

$$e^{P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{P(x)dx}y = e^{\int P(x)dx}f(x).$$

(iv) O lado esquerdo da equação em (iii) é a derivada do produto do fator de integração e a variável dependente y, isto é,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x).$$

(v) Integre ambos os lados da equação encontrada em (iv).

Vamos aplicar os passos do método dado para resolver o exemplo seguinte:

Exemplo 3.26.

Integre para achar a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3\cos(2x), \quad x > 0. \tag{3.150}$$

Solução: Neste caso, temos $P(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f(x) = 3\cos(2x)$. Logo, o fator de integração será:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x. \tag{3.151}$$

Então vamos multiplicar todos os termos da Equação (3.150) por x:

$$\begin{aligned} xy' + x\frac{y}{x} &= 3x\cos(2x) \\ xy' + y &= 3x\cos(2x). \end{aligned} \tag{3.152}$$

Fazendo

$$\frac{d}{dx}(xy) = xy' + y, \tag{3.153}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}(xy)dx &= \int 3x\cos(2x)dx \\ xy &= 3\int x\cos(2x)dx \\ xy &= \frac{3}{2}x\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{4}\cos(2x) + c \\ y &= \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{3}{4x}\cos(2x) + \frac{c}{x}. \end{aligned} \tag{3.154}$$

Portanto, a solução geral é $y = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{4x}\cos(2x) + \frac{c}{x}$.

Solução Geral

Suponha novamente que as funções $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas em um intervalo comum I e x_0 é um ponto desse intervalo. Então segue-se do Teorema 3.3.2 que existe uma única solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3.155}$$

Porém, vimos antes que (3.140) possui uma família de soluções e que toda solução para a equação no intervalo I tem a forma (3.149). Logo, obter a solução para (3.155) é uma questão de encontrar um valor apropriado para c em (3.149), isto é, a solução é única quando sujeita a uma condição inicial. Por outro lado, estamos certos em chamar (3.149) de solução geral da Equação Diferencial Linear de primeira ordem.

Exemplo 3.27.

Resolva o problema de valor inicial

$$xy' + 2y = 4x^2, \quad \text{para} \quad y(1) = 2. \tag{3.156}$$

Para determinar $P(x)$ e $f(x)$ corretamente, precisamos primeiro colocar a equação (3.156) na forma padrão, dividindo todos os termos por x.

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x. \tag{3.157}$$

Desse modo, $P(x) = \frac{2}{x}$ e $f(x) = 4x$. Para resolver a equação (3.157), primeiro calculamos o fator integrante:

$$\mu(x) = e^{2\int \frac{1}{x}dx} = x^2. \tag{3.158}$$

Multiplicando x^2 por todos os termos da equação, temos

$$\begin{aligned} x^2y' + x^2\frac{2}{x}y &= 4x^3 \\ x^2y' + 2xy &= 4x^3. \end{aligned} \tag{3.159}$$

Fazendo

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = x^2y' + 2xy, \tag{3.160}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}(x^2y) &= \int 4x^3dx \\ x^2y &= x^4 + c_1 \\ y &= x^2 + \frac{c_1}{x^2}. \end{aligned} \tag{3.161}$$

Portanto, a solução geral para Equação Diferencial é $y = x^2 + \frac{c_1}{x^2}$.

Vamos encontrar a solução para o problema de valor inicial com a condição $y(1) = 2$.

$$\begin{aligned} 2 &= 1^2 + \frac{c_1}{1^2} \\ c_1 &= 1. \end{aligned} \tag{3.162}$$

Logo, a solução para o PVI no intervalo, é $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

3.3.7 Método Numérico

Nesta subseção sobre métodos numéricos relativos às Equações Diferenciais, são descritos definições e conceitos apresentados por meio da literatura encontrada em Zill e Cullen (2011) e Azevedo (2021). Uma abordagem objetiva, buscando descrever de forma clara e concisa alguns fundamentos e procedimentos utilizados para resolver Equações Diferenciais através do método numérico de Runge-Kutta.

Nas Equações Diferenciais, existem algumas resoluções de modelos matemáticos aplicados que exigem cálculos de maior complexidade, ou seja, nem todas as Equações Diferenciais podem ser resolvidas analiticamente, o que por sua vez, pode se obter resultados através de uma aproximação da solução real. Nesse sentido, os métodos numéricos surgem como uma ferramenta para a resolução desses modelos, quando comparados aos métodos analíticos. Deste modo, estes métodos acabam reduzindo algumas limitações que são postas nas técnicas de resoluções analíticas.

Métodos de Diferenças-Finitas

O uso do método de diferenças finitas tem origem na resolução numérica das Equações Diferenciais. A técnica tem como fundamento a discretização, processo que divide algo contínuo em partes menores, ou seja, dividir em pequenas partes a região onde está procurando a solução. Ao representar o intervalo contínuo como uma expressão algébrica, teremos a solução numérica pelo método de diferenças finitas, antes de tudo, discretizando a região onde procura-se um resultado, e por conseguinte substituir as derivadas presentes na Equação Diferencial pelas aproximações alcançadas.

Assumindo que $y(x)$ têm derivadas até a ordem $n+1$, então a função pode ser escrita como:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^n(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{n+1}(\xi). \tag{3.163}$$

Sendo h o espaçamento entre os pontos discretos do domínio considerado. Se $n = 1$ na equação (3.163), tem-se a fórmula avançada da aproximação em diferenças finitas, com erro de ordem dois, logo a aproximação de primeira ordem é dada por:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}. \tag{3.164}$$

Tomando $n = 2$, para $\pm h$, temos que:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x), \tag{3.165}$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x). \tag{3.166}$$

Fazendo a diferença entre (3.165) e (3.166), obtém-se a fórmula centrada para aproximação em diferenças finitas:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}. \tag{3.167}$$

As fórmulas fornecem uma aproximação para a derivada na qual o erro é da ordem h^2, assim a aproximação é de segunda ordem.

Método de Runge-Kutta

O Método Runge-Kutta é um método de obter soluções aproximadas de Equações Diferenciais, podendo ser aplicado a diferentes ordens. Este método é capaz de alcançar a exatidão de uma abordagem por Série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas parciais de ordem superior. Há muitas variações, mas todas podem ser postas na forma geral

$$y_{i+1} = y_i + \phi h, \tag{3.168}$$

onde ϕ é chamada função incremento, a qual pode ser interpretada como representativa da inclinação em um intervalo. A função incremento pode ser escrita na forma geral

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + ... + a_n k_n, \tag{3.169}$$

onde os a's são contantes e os k's são

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} k_1 h + \beta_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(x_i + \alpha_{n-1} h, y_i + \beta_{n-1,1} k_1 h + \beta_{n-1,2} k_2 h + \cdots + \beta_{n-1,n-1} k_{n-1} h).
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Onde os α's e β's são constantes. Observe que os k's são relações de recorrência, isto é, k_1 aparece na equação para k_2, e assim por diante.

Considerando um processo de segunda ordem, temos a seguinte versão

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h, \tag{3.171}$$

em que

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{11} k_1 h).
\end{aligned} \tag{3.172}$$

Os valores para a_1, a_2, α_1 e β_{11} são calculados igualando a equação (3.171) à expansão de Taylor até os termos de 2° grau. Dessa forma, três equações podem ser reduzidas para calcular as quatro constantes desconhecidas. Essa equações são:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2\alpha_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2\beta_{11} &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.173}$$

Como são três equações com quatro incógnitas, essas equações são ditas indeterminadas. Assim, devemos escolher um valor para uma das incógnitas para determinar as outras três. Então, se definirmos um valor para a_2, podemos resolver simultaneamente as outras duas, da forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - a_2 \\ \alpha_1 &= \beta_{11} = \frac{1}{2a_2} \end{aligned} \tag{3.174}$$

Como existem infinitos valores possíveis para escolha de a_2, existe também um infinito número de métodos de Runge-Kutta de segunda ordem.

A Fórmula de Runge-Kutta de Quarta Ordem

O método de Runge-Kutta de **quarta ordem** consiste em determinar constantes apropriadas tais que a fórmula como

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \tag{3.175}$$

Concorde com um desenvolvimento de Taylor até h_4, isto é, até o quinto termo. Tal como em (3.172), os k_i são múltiplos constantes de $f(x, y)$ calculados em pontos selecionados. A dedução efetiva do método é, no mínimo, trabalhosa; por isso, limitamo-nos a enunciar os resultados:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3). \end{aligned} \tag{3.176}$$

Note que em (3.176), k_2 depende de k_1, k_3 depende de k_2 e assim por diante. Também, k_2 e k_3 envolvem aproximações do coeficiente angular do ponto médio do intervalo entre x_n e $x_{n+1} = x_n + h$. Enquanto outras fórmulas de quarta ordem são facilmente obtidas,

o algoritmo resumido é tão amplamente utilizado e reconhecido como uma valiosa ferramenta computacional que muitas vezes é referido como o método de Runge-Kutta de quarta ordem ou o clássico método de Runge-Kutta.

Através do método de Runge-Kutta, é possível simular e analisar sistemas complexos. Desse modo, pode-se equilibrar a precisão desejada com a eficiência computacional, tornando o método flexível e adaptável às necessidades específicas de cada problema. O método quando aplicado na utilização de resolução das Equações Diferenciais que não possuem soluções analíticas, permite avanços significativos na compreensão e modelagem de fenômenos complexos. Sua aplicação é extremamente relevante em pesquisas científicas, na otimização de modelos matemáticos e suas aplicações e no aprimoramento de processos em diversas áreas.

As Equações Diferenciais ordinárias de primeira ordem são utilizadas com frequência para modelar o comportamento de algum sistema ou fenômeno, seja nas ciências de modo geral, nas Engenharias, Economia e até mesmo na Psicologia. A descrição se inicia identificando as variáveis que são responsáveis por mudanças do sistema e um conjunto de hipóteses que seja razoável sobre o sistema. Neste trabalho, as EDO serão utilizadas para descrever os modelos epidemiológicos utilizados para obtenção de dados dos estudos da Covid-19. Veremos isso mais detalhadamente no próximo capítulo.

Capítulo 4

Modelagem Matemática e a Pandemia da COVID-19

4.1 Modelagem Matemática e as Equações Diferenciais

O Cálculo Diferencial e Integral é uma ferramenta matemática que desempenha um papel fundamental na modelagem de fenômenos do mundo real. Ele é amplamente utilizado para traduzir e interpretar esses fenômenos, com o auxílio da Matemática. Através do Cálculo, é possível formular modelos matemáticos que capturam a essência dos fenômenos estudados, permitindo uma compreensão mais profunda e uma representação precisa dos mesmos. Esse processo de utilizar o Cálculo para formular modelos matemáticos é conhecido como Modelagem Matemática e é utilizado em uma ampla gama de aplicações em diversas áreas do conhecimento (BASSANEZI, 2015b).

Em Bassanezi (2015a), a modelagem é o processo de criação de modelos em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, alinhadas com interpretação e subjetividade do seu modelador. Deste modo, a modelagem matemática passa a ser uma estratégia utilizada para obter explicação ou entendimento de determinadas situações reais. Para ele, um modelo matemático é um processo dinâmico que se adequa e nunca encerra uma verdade definitiva, pois é sempre uma aproximação da realidade analisada e, portanto está sempre sujeita a mudanças.

De acordo com Basso et al. (1999), um modelo matemático de uma situação problemática real é uma representação matemática de uma porção da realidade, como a determinação da superfície corporal de uma pessoa ou a previsão do tempo. Essa representação é construída utilizando objetos, relações e estruturas matemáticas, como tabelas, gráficos, relações funcionais e figuras geométricas.

Um modelo matemático busca descrever elementos essenciais em uma situação, e de forma premeditada deixa de lado os elementos secundários. No entanto, como um modelo

matemático é uma simplificação útil do que se pretende descrever, ele simplifica certos aspectos da realidade para destacar e tornar mais visíveis aspectos mais relevantes. Para ele, bons modelos geralmente evitam excessivas simplificações, priorizando a evidência dos aspectos fundamentais da situação (BASSO et al., 1999).

4.2 Modelos Matemáticos Epidemiológicos

Para Luiz (2012), houve um período em que, uma das principais preocupações da sociedade era a propagação de doenças infecciosas, que resultavam em um elevado número de mortes. Quando essas enfermidades se disseminam rapidamente em um curto intervalo de tempo, temos uma epidemia. Diante desse cenário, pesquisas foram iniciadas com o intuito de compreender cada tipo de epidemia, identificar suas causas e buscar formas de combate e controle efetivo. A modelagem Matemática se apresenta como uma valiosa ferramenta nesse estudo, permitindo a transformação de situações reais em modelos matemáticos que, após análise, fornecem resultados interpretáveis e aplicáveis à realidade.

A Modelagem Matemática em Epidemiologia é feita através do estudo de equações que descrevem a interação entre a população e o ambiente, permitindo uma análise minuciosa da doença em questão. Compreender a doença e sua propagação de maneira mais profunda é crucial, pois isso leva a métodos mais eficazes para evitar sua transmissão, incluindo a implementação de medidas preventivas, como campanhas de vacinação. Deste modo, os modelos matemáticos epidemiológicos são fundamentais para fortalecer o controle e combate às doenças (LUIZ, 2012).

Estes modelos e simulações numéricas se transformam em conjecturas e teorias de avaliações quantitativas, enquanto ferramentas úteis para realizar projeções da propagação de doenças infecciosas. Através deles são possíveis determinar parâmetros e projetar, por exemplo, evoluções de epidemias como a COVID-19, através do conhecimento e estudo da própria epidemia ou conhecimento acumulado de diferentes épocas, ou locais e até mesmo de outras doenças. Os modelos do tipo SIS, SIR e SEIHR foram desenvolvidos por Kermack e McKendrick, em 1927 e 1933, para descrever infecções endêmicas (FRANCO; DUTRA, 2020).

Esses modelos são identificados como um arranjo de divisões, composto principalmente por um conjunto limitado, que segundo Bassanezi e Jr. (1988), consiste essencialmente em um número finito de subsistemas uniformes interconectados, chamados compartimentos, que trocam entre si e com o meio ambiente, quantidades ou concentração de materiais. Esta troca efetuada em cada compartimento é descrita por uma equação diferencial de primeira ordem.

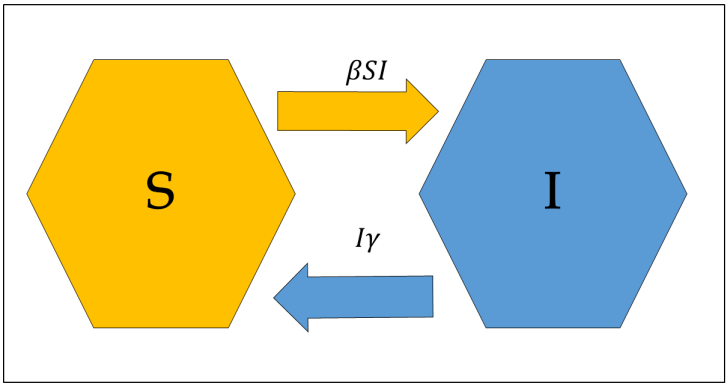
A seguir, durante a explanação dos Modelos Matemáticos Epidemiológicos SIS e SIR, vamos conceituar as notações e considerações utilizadas por Flores et al. (2021). Assim sendo, quando necessário poderemos utilizar citação de demais autores, sendo então

mencionado quando houver conveniência.

4.2.1 Modelo SIS

O modelo compartimental SIS (Suscetível-Infectado-Suscetível), possui uma dinâmica na qual a população é dividida em dois compartimentos, um com indivíduos suscetíveis e outro com indivíduos infectados. Na classe dos suscetíveis, estão todos que podem contrair a infecção. Quando os suscetíveis são contaminados, entram na classe dos infectados, e tornam-se capazes de transmitir a doença para outros indivíduos. Neste caso, como estes sujeitos não adquirem imunidade, retornam à classe suscetível, ou seja, uma vez curado, o infectado volta a ser suscetível.

Figura 4.1: Diagrama geral de transferência para o modelo SIS padrão.



Fonte: Autoria própria

A Figura 4.1 representa o mecanismo central da dinâmica do modelo SIS. Indivíduos suscetíveis em **S**, ao serem contaminados são considerados Infectados em **I**. Tais indivíduos podem então se recuperar e regressar a **S** novamente, estando mais uma vez suscetíveis a doença. Geralmente este modelo compartimental é utilizado para doenças como gripes e resfriados, tornando um modelo dinâmico de apenas dois compartimentos.

Variáveis e Constantes

Isaac Newton introduziu na ciência ocidental no século XVII que o mundo funciona usualmente pelo entendimento acerca de constantes, levando em conta que algumas destas concepções podem ser expressas como um sistema de equações diferenciais, onde a solução deste sistema pode mostrar o que acontece em cada situação. Logo a, seguir mostramos na Tabela em 4.1 as variáveis que iremos utilizar nos modelos compartimentais SIS e SIR, seguido do significado das constantes que serão utilizadas, na Tabela 4.2.

Tabela 4.1: **Variáveis utilizadas nos Modelos SIS e SIR**

s	Números de indivíduos suscetíveis
i	Números de indivíduos infectados
$n = s + i$	Número total de indivíduos da população
$S = \frac{s}{n}$	Fração da população suscetível
$I = \frac{i}{n}$	Fração da população infectada
R_0	Número médio de indivíduos infectados por cada indivíduo infectado

Tabela 4.2: **Taxas utilizadas nos Modelos SIS e SIR**

$S(t)$	Fração da população suscetível no instante t
$I(t)$	Fração da população infectada no instante t
$R(t)$	Fração da população recuperada no instante t
β	Taxa de infecção
γ	Taxa de recuperação

Suponha que a população tenha um tamanho constante, isto é, não estamos considerando nascimentos nem mortes. Seja $S(t)$ a fração da população que é suscetível no instante t e seja $I(t)$ a fração da população que está infectada no instante t. Temos que $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ e $S(t) + I(t) = 1$, em que 1 é considerado como o total da população. Pode ser razoável supor que se multiplicarmos $I(t)$ por um número k, então multiplicaremos a taxa com que um indivíduo em contato com outro resulte na transmissão da doença e multiplicando $S(t)$ por um número k, então estamos multiplicando a taxa com que tais contatos ocorrem. Logo, a taxa de transmissão da doença no instante t é proporcional ao produto $S(t)I(t)$. Deste modo, é natural supor que a taxa que os infectados se recuperam e voltam a ser suscetíveis, no tempo t, é proporcional a $I(t)$. Estas suposições levam ao seguinte par de equações para as constantes de proporcionalidades encontradas:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t), \tag{4.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \tag{4.2}$$

A fim de tornar a notação mais leve, quando não houver confusão, usaremos a seguinte notação para as equações 4.1 e 4.2:

$$\dot{S} = -\beta SI + \gamma I, \tag{4.3}$$

$$\dot{I} = \beta SI - \gamma I, \tag{4.4}$$

As equações 4.3 e 4.4 que constituem o modelo SIS, quando somadas, obtém-se $\dot{S}+\dot{I}=0$, assim se inicialmente temos $S+I=1$, então $S+I$ permanece igual a 1 sempre. Isso faz sentido, uma vez que S e I são tratados como frações da população.

Para os autores, as equações 4.3 e 4.4 mostram que, se soubermos os valores S e I no instante t, então saberemos as taxas de variação S e I no mesmo instante. Tais fórmulas descrevem em termos matemáticos a forma como ocorre a transmissão da doença. Entretanto, eles dizem que as equações não são capazes de dizer o que pode ocorrer ao longo do tempo. Nem como a doença pode se comportar continuamente no sentindo de espalhar ou tender para um valor intermediário ficando presente na população para sempre.

Antes de avançarmos para apresentação da linha de fase do modelo SIS, vamos mostrar alguns fatos fundamentais sobre Equações Diferenciais.

Teorema 4.2.4. *Seja U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável em $x_0 \in U$. Então:*

(1) *O problema de valor inicial*

$$\frac{dx}{dy} = f(x),\ x(t_0) = x_0 \tag{4.5}$$

tem solução única.

(2) *Se $x(t)$ permanece num conjunto fechado e compacto (fechado e limitado) de U quando t aumenta (respectivamente diminui), então x está definido para $t_0 \leq t < \infty$ (respectivamente, $-\infty < t \leq t_0$).*

O conjunto U é chamado de espaço de fase (Domínio de f).

Um ponto x_0, tal que $\frac{dx}{dy} = 0$, é um equilíbrio da equação diferencial $\frac{dx}{dy} = f(x)$, logo, $f(x_0) = 0$.

Corolário 4.2.4.1. *Se x_0 é um equilíbrio de $\frac{dx}{dy} = f(x)$, então a única solução para o PVI é $x(t) = x_0$, para todo, $-\infty < t < \infty$.*

Corolário 4.2.4.2. *Seja $x(t)$ uma solução de $\frac{dx}{dy} = f(x)$. Suponhamos que, no instante t_0, $x(t_0)$ não é um equilíbrio, ou seja, $f(x(t_0)) \neq 0$. Então $x(t)$ não é um equilíbrio para todos os valores de t, ou seja, $f(x(t)) \neq 0$ para todos os valores de t.*

Linha de fases para o sistema SIS

Dado o sistema de equações diferenciais referente ao modelo SIS:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + \gamma I \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \end{cases} \tag{4.6}$$

como $S(t) + I(t) = 1$, para qualquer tempo t, não necessitamos das duas equações do sistema 4.6, dado que se calcularmos $I(t)$, conseguimos encontrar $S(t)$, quando $S(t) = 1 - I(t)$. Logo usando a equação 4.3, após substituir $S = 1 - I$, temos

$$\dot{I} = \beta(1 - I)I - \gamma I = (\beta - \gamma)I - \beta I^2. \tag{4.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\beta - \gamma)I - \beta I^2 &= 0 \\ I(\beta - \gamma - \beta I) &= 0. \\ \text{Logo, } I = 0 \ \textit{ou} \ \ \beta - \gamma - \beta I &= 0 \\ \beta I &= \beta - \gamma \\ I &= \frac{\beta - \gamma}{\beta} \\ I &= 1 - \frac{\gamma}{\beta}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Encontrando a solução geral, temos

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= (\beta - \gamma)I - \beta I^2 \\ dt &= \frac{dI}{(\beta - \gamma)I - \beta I^2} \\ &= \frac{dI}{I\left(I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\right)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Utilizando a técnica de frações parciais,

$$\begin{aligned} \frac{1}{I\left(I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\right)} &= \frac{A}{I} + \frac{B}{I + \frac{\gamma}{\beta} - 1} \\ \Rightarrow 1 &= A\left(I + \frac{\gamma}{\beta} - 1\right) + BI \\ 1 &= (A + B)I + \frac{A\gamma}{\beta} - A. \end{aligned}$$

$$\text{Daí, } \begin{cases} 0 &= A + B \Rightarrow B = -\dfrac{\beta}{\gamma - \beta} \\ 1 &= A\left(\dfrac{\gamma}{\beta} - 1\right) \Rightarrow A = \dfrac{1}{\frac{\gamma}{\beta} - 1} = \dfrac{\beta}{\gamma - \beta}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} t = \int \frac{dI}{I\left(I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\right)} &= \int \frac{\frac{\beta}{\gamma-\beta}}{I} dI - \int \frac{\frac{\beta}{\gamma-\beta}}{I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)} dI \\ &= \frac{\beta}{\gamma - \beta}\left[\ln|I| - \ln\left|I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\right|\right] + c \\ &= \frac{\beta}{\gamma - \beta} \cdot \ln\left|\frac{I}{I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)}\right| + c \\ &= \ln\left|\frac{I}{I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)}\right|^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}} + c. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} e^t &= \left(\frac{I}{I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}} \cdot e^c \\ ke^t &= \left(\frac{I}{I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)}\right)^{\frac{\beta}{\gamma-\beta}} \\ ke^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}} &= \left(\frac{I}{I - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)}\right). \end{aligned}$$

Com isso,

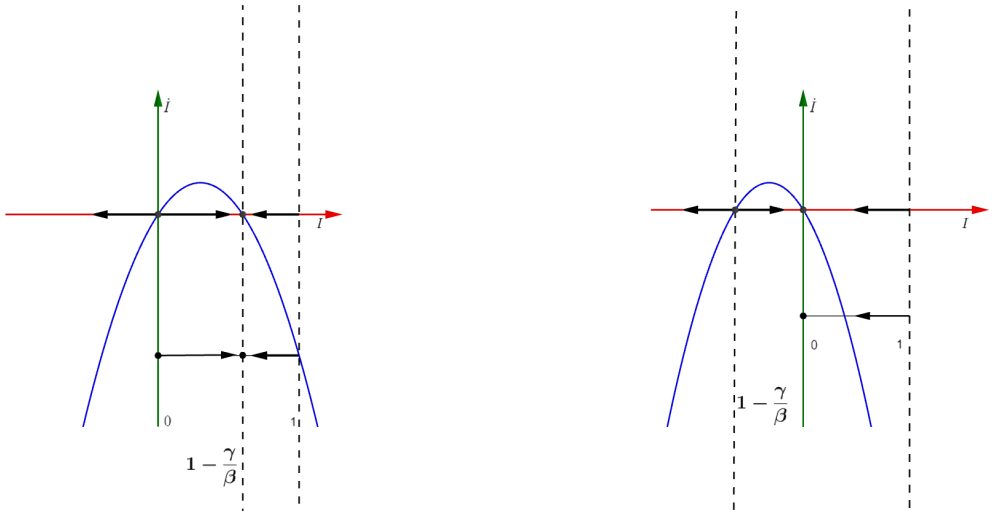
$$\begin{aligned} \left[I - \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta}\right)\right] ke^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}} &= I \\ Ike^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}} - \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta}\right) ke^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}} &= I \\ Ike^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}} - I &= \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta}\right) ke^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}} \\ I(t)\left(ke^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}} - 1\right) &= \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta}\right) ke^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}} \\ I(t) &= \frac{\left(\frac{\beta - \gamma}{\beta}\right) ke^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}}}{ke^{t \cdot \frac{\gamma-\beta}{\beta}} - 1}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação encontrada é

$$I(t) = \frac{\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta}\right) k e^{t\cdot\frac{\gamma-\beta}{\beta}}}{k e^{t\cdot\frac{\gamma-\beta}{\beta}} - 1}. \tag{4.10}$$

Desenhando a linha de fase através de um gráfico de $\dot{I}$ em função de I, é possível perceber o que acontece no eixo I, através de pontos e setas que demonstram o equilíbrio e onde as soluções crescem e decrescem. Quando $\dot{I} > 0, I(t)$ é crescente; e quando $\dot{I} < 0, I(t)$ é decrescente; e onde $\dot{I} = 0$, existe um equilíbrio. Ainda no gráfico é possível verificar onde I é positivo, negativo ou igual a zero. Por exemplo, existem dois equilíbrios, em $I = 0$ e $I = 1 - \frac{\gamma}{\beta}$.

Figura 4.2: Retrato Linha de Fase SIS



(a) $\frac{\gamma}{\beta} < 1$. (b) $\frac{\gamma}{\beta} > 1$.

Fonte: Autoria própria

Dado que I é uma fração da população, utilizamos apenas o intervalo $\mathtt{I} = \{I : 0 \leq I \leq 1\}$, ou seja, este intervalo é o espaço de fase. Quando restringido, se obtém o que é denominado retrato de fase. Neste intervalo, os valores para os quais β e γ são tomados são sempre valores positivos, e durante a fase podemos observar três diferentes casos:

(i) Se $\frac{\gamma}{\beta} > 1$, o equilíbrio não nulo não está em $\mathtt{I}$.

(ii) Se $\frac{\gamma}{\beta} < 1$, o equilíbrio não nulo está em $\mathtt{I}$.

O terceiro caso, em que $\frac{\gamma}{\beta} = 1$ é omitido por se tratar de improváveis casos intermediários, já que segundo o Corolário 4.2.4.2, as soluções que começam fora de equilíbrio não podem passar por equilíbrios.

A parábola (4.7) foi utilizada para traçar o gráfico da Figura 4.2, com isso, desenhar a linha de fase: setas para esquerda quando $\dot{I} < 0$ e setas para direita quando $\dot{I} > 0$; então nos restringimos ao intervalo `I` para obter o retrato de fase.

(i) Se $\frac{\gamma}{\beta} > 1$, todas as soluções em `I` tendem a 0 quando $t \to \infty$.

(ii) Se $\frac{\gamma}{\beta} < 1$, todas a soluções em `I` com $I(0) > 0$ tendem a $1 - \frac{\gamma}{\beta}$ quando $t \to \infty$. Por outro lado, quando $t \to -\infty$, as soluções com $0 < I(0) < 1 - \frac{\gamma}{\beta}$ tendem a 0.

Temos as seguintes interpretações dos retratos de fase:

(a) Para $\frac{\gamma}{\beta} > 1$, se a doença entra na população ela desaparece.

(b) Se $\frac{\gamma}{\beta} < 1$, se a doença entra na população, a fração da população com a doença tende para o número positivo $I = 1 - \frac{\gamma}{\beta}$ e, por fim, prevalece na população.

Em (b) a doença é dita *endêmica*, e o equilíbrio $I = 1 - \frac{\gamma}{\beta}$ é chamado de *equilíbrio endêmico*. Admitimos sempre $\gamma > 0$, já que, quando $\gamma = 0$, faria referência a uma doença há qual não há forma de recuperar.

Número de reprodução básico R_0

O número básico de reprodução R_0 é o valor mais importante calculado em modelos epidemiológicos, tendo sua relevância durante a pandemia da Covid-19. R_0 se trata do número médio de indivíduos contaminados por cada indivíduo infectado quando uma doença se introduz numa população, na perspectiva de que, em particular, toda população está suscetível à doença. No modelo SIS, R_0 é o produto da taxa de contatos adequados e o número médio de dias em que o indivíduo permanece infectado. Simbolicamente,

$$R_0 = \beta \left(\frac{1}{\gamma} \right) = \frac{\beta}{\gamma}. \tag{4.11}$$

Após a infecção introduzida na população por um indivíduo, ao final do tempo médio de recuperação, este indivíduo será substituído por outros R_0 indivíduos infectados. Sendo assim, se $R_0 > 1$, o número de infectados cresce e a infecção propaga-se; se $R_0 < 1$, o número de infectados decresce e a infecção extingue-se. Na Figura 4.2, considerando a solução $I(t)$ que inicia perto de $I = 0$, tem-se que poucas pessoas estão infectadas e quase toda população está suscetível. Logo:

(i) Se $\frac{\gamma}{\beta} > 1$, então $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} < 1$. Podemos ver que $I(t)$ diminui para 0.

(ii) Se $\frac{\gamma}{\beta} < 1$, então $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$. Podemos ver que $I(t)$ começa próximo de 0 e cresce para um valor de equilíbrio positivo

$$I = 1 - \frac{\gamma}{\beta} = 1 - \frac{1}{R_0}. \tag{4.12}$$

4.2.2 Modelo SIR

Considerando uma doença infecciosa e que garante a imunidade permanente às pessoas que a contraem, pode-se modelar tal doença dividindo a população em três compartimentos: suscetíveis (S), infectados (I) e recuperados (R). Como no modelo SIS, onde consideramos a população com tamanho constante,satisfazem $S(t), I(t)$ e $R(t)$, as frações da população em cada compartimento, no tempo t, com $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, e $R(t) \geq 0$ e $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, e considerando a lei da ação de massas, o sistema de equações diferenciais abaixo, constitui modelo SIR:

$$\dot{S} = -\beta SI, \tag{4.13}$$

$$\dot{I} = \beta SI - \gamma I, \tag{4.14}$$

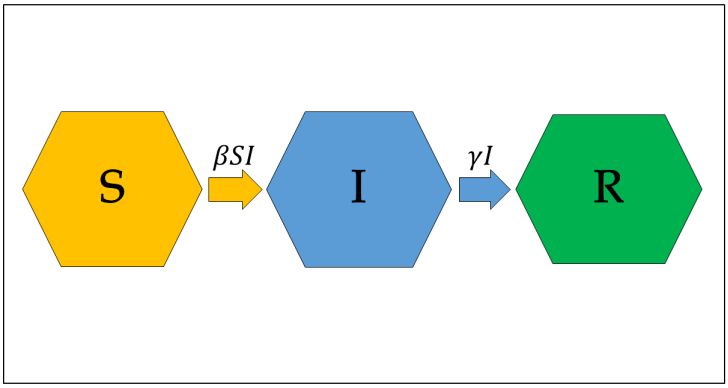
$$\dot{R} = \gamma I. \tag{4.15}$$

Assim, obtemos o seguinte sistema de equação SIR:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases} \tag{4.16}$$

Podemos observar que este modelo é semelhante ao modelo SIS, as constantes $\beta > 0$ e $\gamma > 0$ também têm o mesmo significado que tinham no modelo SIS. A diferença que se estabelece em relação ao modelo SIS, é que neste caso, o indivíduo infectado se recupera e não retorna mais ao compartimento suscetível, por desenvolver imunidade à doença; em vez disso, ele se move para o compartimento dos recuperados, ficando imune à doença, não podendo mais contraí-la. Os compartimentos relacionados ao modelo SIR estão representados na Figura 4.3 abaixo:

Figura 4.3: Diagrama geral de transferência para o modelo SIR padrão.



Fonte: Autoria própria

A Figura 4.3 representa o mecanismo central da dinâmica do modelo SIR. Indivíduos suscetíveis em **S**, ao serem contaminados são considerados infectados em **I**. Tais indivíduos podem então transmitir para outros indivíduos em **S**, migrando em seguida para **R**, tornando-se recuperados e imunes a doença. Estes indivíduos por estarem imunes ou mortos, tornam **R** o compartimento final, sem possibilidades de serem movidos para outros estados.

Este modelo pode ser utilizado quando uma fração da população não é suscetível à doença por uma razão genética, comportamental, imunológica, etc. Logo essa parcela da população deve ser inserida no compartimento dos recuperados (R) desde o início. Quando a doença promove fatalidades, como no caso da Covid-19, estas também devem ser inclusas no compartimento (R), renomeando para compartimentos dos removidos.

No modelo SIR, a constante $\beta > 0$ tem o mesmo significado do modelo SIS, no entanto, a constante γ agora representa a taxa de recuperação ou morte dos infectados. O número de reprodução básico no modelo SIS é dado por (4.11), para o modelo SIR, R_0 tem a mesma constante.

Ao verificar que $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$ e que $S + I + R = 1$, podemos, neste caso, reduzir as três equações 4.13-4.15 a uma única equação depois de calcularmos $S(t)$ e $I(t)$, usando $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$.

Órbitas e retrato de fase para o sistema SIR

Uma órbita de uma Equação Diferencial é a curva no espaço de fase que é traçada por uma solução. Notemos que o sistema SIR, uma vez que as duas primeiras equações em (4.16), só dependem de S e I, é possível reduzi-lo a uma única equação. Deste modo, dividindo a segunda equação (4.14) pela primeira (4.13), obtemos uma equação diferencial

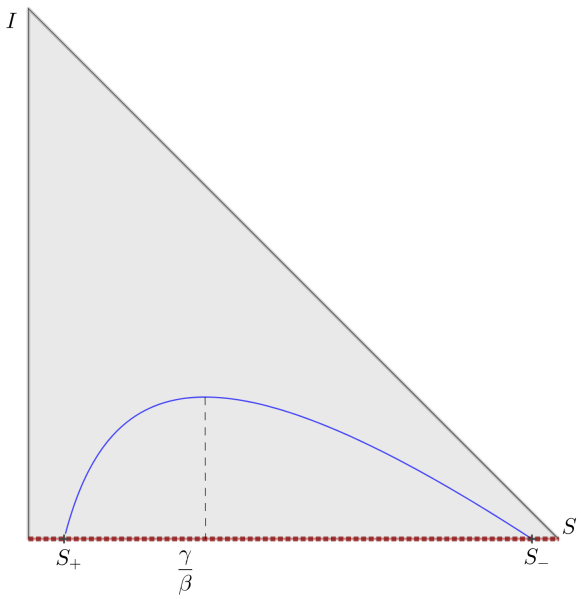
das órbitas no espaço SI que são traçadas por soluções. Teremos,

$$\begin{aligned}\frac{\dot{I}}{\dot{S}} &= \frac{dI}{dS}\\ \frac{dI}{dS} &= \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI}\\ &= \frac{I(\beta S - \gamma)}{-\beta SI}\\ &= \frac{\beta S - \gamma}{-\beta S}\\ &= \frac{\beta S}{-\beta S} + \frac{\gamma}{\beta S}\\ &= -1 + \frac{\gamma}{\beta S}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Integrando (4.17), obtemos a família de curvas

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dS} &= -1 + \frac{\gamma}{\beta S}.\\ \int dI &= -\int 1dS + \frac{\gamma}{\beta}\int \frac{1}{S}dS.\\ I &= -S + \frac{\gamma}{\beta}\ln S + c.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Figura 4.4: Uma órbita do modelo SIR



Fonte: Autoria própria

Todas as curvas desta família atingem seu valor máximo quando $S = \frac{\gamma}{\beta}$, como mostra a Figura 4.4. Através desta figura podemos observar que a curva apresentada faz referência

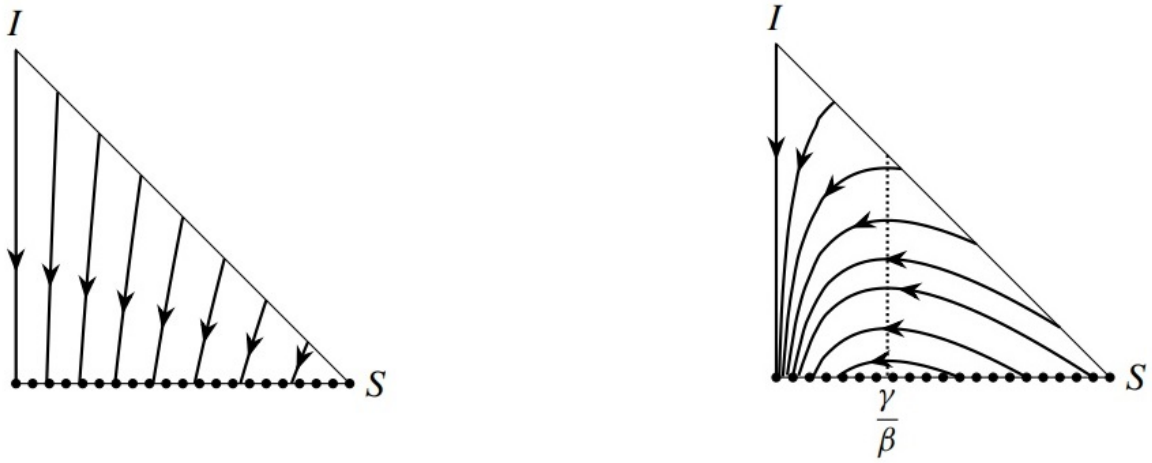
a $R_0 > 1$.Consiremos uma solução $(s(t), I(t))$ que começa em um ponto desta curva que está em $\mathcal{T}_+$, que seria a área positiva do gráfico. Sendo que a curva traçada por 4.18, não pode ser toda a solução, já que, pelo corolário 4.2.4.2, as soluções não podem passar através dos equilíbrios do eixo S. Logo, a curva traçada pela solução é apenas a parte com $I > 0$ da curva 4.18, ou seja, a curva que estará em $\mathcal{T}_+$. A intersecção desta curva será em dois pontos no eixo S, $(S_-, 0)$ e $(S_+, 0)$, com $S_+ < \frac{\gamma}{\beta} < S_-$ e

$$\lim_{t\to-\infty}(S(t), I(t)) = (S_-, 0) \text{ e } \lim_{t\to\infty}(S(t), I(t)) = (S_+, 0)$$

O retrato de fase $\frac{dx}{dy} = f(x)$ é o esboço que mostra todas as órbitas ivulgares, ou seja, trajetórias incomuns ou atípicas, e exemplos de órbitas típicas, com setas que indicam a direção dinâmica do movimento da função. No sistema SIR, os equilíbrios no eixo S e a órbita vertical ao longo do eixo I qualificam-se como Invulgares; as curvas 4.18, qualificam-se como órbitas típicas, mostrando que o retrato de fase do sistema depende apenas da razão $\frac{\gamma}{\beta}$ ou de $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.

A Figura 4.5 mostra o retrato de fase do sistema SIR em dois casos: $R_0 < 1$ e $R_0 > 1$. A figura da direita, correspondente a $R_0 = 3$, utiliza $\gamma = 0.1$, valor razoável para Covid-19, e $\beta = 0.3$ que é um valor aceitável para a Covid-19 em uma região urbana no início da pandemia.

Figura 4.5: Retrato Linha de Fase SIR.



(a)$R_0 = \frac{1}{3}, \beta = 0.1, \gamma = 0.3$. (b)$R_0 = 3, \beta = 0.9, \gamma = 0.3$.

Fonte: Flores et al. (2021)

Interpretação das Órbitas

Quando $R_0 > 1$, a maioria das órbitas de 4.18 do sistema SIR são semelhantes a apresentada na Figura 4.4, tendo o equilíbrio $(S, I) = (S_-, 0)$, com $\frac{\gamma}{\beta} < S_- < 1$, e um equilíbrio $(S, I) = (S_+, 0)$, com $0 < S_+ < \frac{\gamma}{\beta}$. Uma epidemia começa em um estado populacional próximo de $(S, I) = (S_-, 0)$ com $\frac{\gamma}{\beta} < S_- \leq 1$, ou seja, a fração populacional S_- é suscetível e ninguém está ainda infectado. A fração populacional restante $R_- = 1 - S_-$ não é suscetível à doença por estarem imunes ou mortos. Quando a doença é introduzida, de modo que I se torne ligeiramente positivo, o número de infectados aumenta, e o número de suscetíveis diminui. Passado tempo, o número de suscetíveis cai abaixo de $\frac{\gamma}{\beta}$ e o número de infectados começa a cair também. A doença começa a extinguir-se.

No final da epidemia, a fração suscetível da população é S_+, com $0 < S_+ < \frac{\gamma}{\beta}$. Dessa forma, a diferença entre S_- e S_+ é a fração da população que contraiu a doença durante a epidemia.

Para compreendermos os valores onde inicialmente a população é suscetível à doença é em S_+, podemos considerar que $S_- = 1$, deste modo, quando $1 - S_+$, resulta na fração da população infectada durante a pandemia. Portanto, podemos calcular S_+ quando o valor de S_- é dado. Se a curva 4.18 passa pelo ponto $(S_-, 0)$, então

$$0 = -S_- + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_- + c \Rightarrow c = S_- - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_-.$$

Então, se a curva passa por $(S_+, 0)$, temos

$$0 = -S_+ + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_+ + c = -S_+ + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_+ + S_- - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_-.$$

Simplificando,

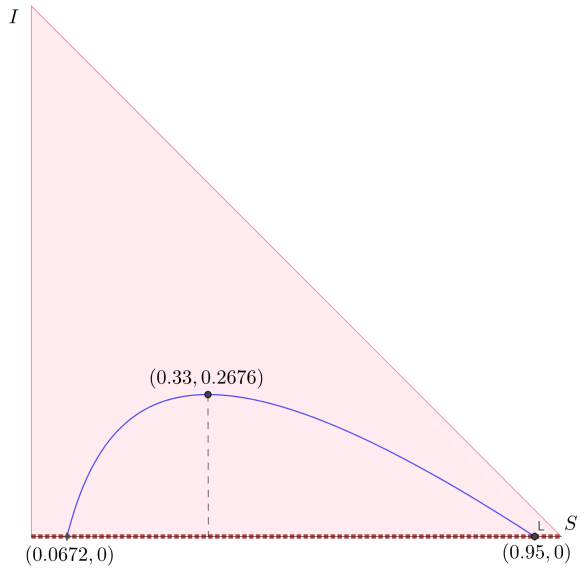
$$-(S_+ - S_-) + \frac{\gamma}{\beta}(\ln S_+ - \ln S_-) = 0.$$

Dado S_-, podemos encontar S_+ escrevendo

$$-(S - S_-) + \frac{\gamma}{\beta}(\ln S - \ln S_-) = 0.$$

e resolver em ordem S, usando método numérico.

Figura 4.6: Órbita SIR



Fonte: Autoria própria

Na Figura 4.6, temos $S_- = 0.95$, $S_+ = 0.0672$ e o valor máximo de I é 0.2676. O valor máximo de I na órbita é a fração máxima da população infectada de uma só vez na epidemia. Este número auxilia na identificação da possibilidade de uma sobrecarga no sistema hospitalar em um dado momento.

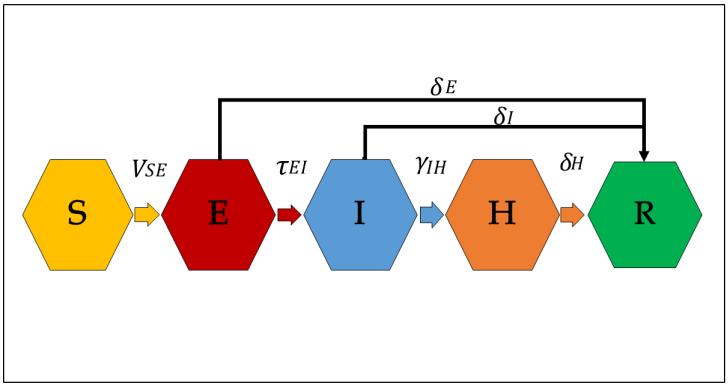
Supondo que R_0=3, que é considerado uma estimativa razoável para o início de uma pandemia da Covid-19 em regiões urbanas, o valor máximo de I seria cerca de 0.3005. Isto significa que 30% da população poderia ser infectada de uma só vez. A população no Brasil tem cerca de 211 milhões de habitantes e 30% da população equivale a aproximadamente, 63 milhões. Cerca de $3,5\%$ dos pacientes da Covid-19 necessitam de hospitalização, logo cerca de 2,2 milhões precisariam ser hospitalizados simultaneamente. No entanto, o Brasil tem cerca de 410 mil camas.

Convém destacar que estes números não correspondem a uma situação real, em função das medidas de prevenção e cuidados adotados durante uma epidemia. Diante uma situação dramática é comum que a população adote medidas preventivas. Com isso, obtemos reduções nos valores de β e R_0, sugerindo uma moderação quanto aos valores máximos de infecções.

4.2.3 Modelo SEIHR

Em Malagutti e Eisencraft (2021), o modelo matemático epidémico Suscetível - Exposto - Infectado - Hospitalizado - Recuperado (SEIHR) é baseado na separação de cinco estados compartimentais em que a população será dividida. O primeiro compartimento **S** *susceptible*, indica a população saudável que não foi infectada pela doença; **E** *exposed*, indica aqueles que foram infectados e podem transmitir, porém estão assintomáticos; **I** *infected*, são os indivíduos sintomáticos; **H** *hospitalized*, representam os que estão infectados, mas não podem transmitir por estarem hospitalizados; **R** *recovered* corresponde aos indivíduos que não estão mais infectados pela doença e nem podem mais transmitir por estarem imunes ou mortos. Diferente dos modelos apresentados anteriormente SIS e SIR, o modelo compartimental SEIHR apresenta mais compartimentos, o que pode possibilitar uma maior flexibilidade ao estado da população, sendo mais eficaz, deste modo, a doenças infecciosas como a COVID-19.

Figura 4.7: Diagrama geral de transferência para o modelo SEIHR padrão



Fonte: Autoria própria

A Figura 4.7 representa o mecanismo central da dinâmica do modelo SEIHR. Indivíduos suscetíveis em **S**, ao serem infectados são considerados inicialmente assintomáticos em **E**. Tais indivíduos podem então contaminar outros indivíduos em **S**, além da possibilidade de evoluírem, de modo, a migrar para o compartimento **I** infectado sintomático, ou ainda, para **R**, tornando-se recuperados e imunes a doença. Ainda sobre os indivíduos do compartimento **I**, estes podem transmitir a doença para os indivíduos em **S**, além de poder migrar para o compartimento **H** de hospitalizados, não transmitindo mais a doença pelo rigor de prevenção e cuidado estabelecido em **H** e migrando em seguinda para **R**, não contaminando mais os indivíduos em **S** por estarem imunes ou mortos, tornando-se **R** o compartimento final, sem possibilidades de serem movidos para outros estados.

A evolução dos estados do modelo compartimental SEIHR é descrita pelo seguinte conjunto de Equações Diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -pV_{SE}S(t) = \left[-p\epsilon\dfrac{E(t)}{N} - p\alpha\dfrac{I(t)}{N}\right] S(t); \\ \dfrac{dE}{dt} = pV_{SE}S(t) - (\tau_{EI} + \delta_E)\, E(t); \\ \dfrac{dI}{dt} = \tau_{EI}E(t) - (\gamma_{IH} + \delta_I)\, I(t); \\ \dfrac{dH}{dt} = \gamma_{IH}I(t) - \delta_H H(t); \\ \dfrac{dR}{dt} = \delta_E E(t) + \delta_I I(t) + \delta_H H(t). \end{cases} \tag{4.19}$$

Os parâmetros utilizados são explicados na tabela 4.3

Tabela 4.3: **Parâmetros utilizados no Modelo SEIHR**

ϵ	Taxa de transmissão de indivíduos expostos
α	Taxa de transmissão de indivíduos infectados
δ_E	Taxa de recuperação de assintomáticos
δ_I	Taxa de recuperação de sintomáticos
δ_H	Taxa de recuperação de hospitalizados
τ_{EI}	Taxa em que os indivíduos expostos tornam-se sintomáticos
γ_{IH}	Taxa de hospitalização assintomáticos
p	Índice de intervenção
N	População Total

O mecanismo de infecção deste modelo, descrito por Niu et al. (2020), acontece quando um indivíduo suscetível (S) entra em contato com uma média de indivíduos por dia. Para cada contato com um indivíduo exposto (E) ou infectado (I), a uma probabilidade ϵ ou α, respectivamente, um indivíduo suscetível contrairá a doença movendo-se para o compartimento exposto (E) (V_{SE}).

O compartimento exposto (E) é composto por pessoas que não apresentam sintomas e permanecerão indetectados até sua própria autorrecuperação ou morte, entrando assim no compartimento removido (R) (δ_E). Estima-se que as proporções recuperadas adquiram imunidade permanente à reinfecção. As proporções restantes do compartimento (E) tornam-se sintomáticas após um período latente, entrando assim no compartimento infectado (I) (τ_{EI}).

O compartimento das pessoas infectadas (I) se recuperarão ou morrerão antes de serem diagnosticadas (δ_I), enquanto as demais serão hospitalizadas após o diagnóstico, entrando assim no compartimento hospitalizado (H) (γ_{IH}). Presume-se que as pessoas no comparti-

mento (H) não são contagiosas devido a medidas rígidas de quarentena. Finalmente, estas pessoas se recuperarão ou morrerão e, assim, passarão para o compartimento removido (R) após um período de hospitalização (δ_H).

Para Niu et al. (2021), a movimentação dos indivíduos entre os compartimentos propostos, apenas os compartimentos S, E e R permitem que as pessoas de movam livremente para dentro ou para fora do sistema. As taxas de entrada das pessoas para o compartimento R são assumidas como iguais, de modo que a população do compartimento R dependa apenas da entrada dos outros quatro compartimentos. A taxa de migração para dentro e para fora de cada compartimento é proporcional ao tamanho desse compartimento.

4.3 Pandemia da COVID-19

O Comitê Internacional de Taxonomia de Vírus (ICTV) adotou síndrome respiratória aguda grave 2 (SARS-CoV-2) como nome para o novo vírus causador da doença COVID-19. Alguns estudos apontam o mercado de frutos-do-mar de Huanan, distrito de Jianghan, Wuhan, na província de Hubei, China, como foco dos primeiros casos. Algumas possibilidades apontam para o morcego sendo um reservatório da SARS-CoV-2, transmitindo em seguida ao homem. Contudo, não se descarta a possibilidade de transmissão da doença COVID-19 por outros animais selvagens que possam ter sido comercializados no mercado (DUARTE, 2020).

Os primeiros casos de infecção registrados pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2), foram em dezembro de 2019, diagnosticados como uma pneumonia grave, na cidade de Wuhan, China. Com a rápida propagação a nível mundial, a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou em 11 de março de 2020, a infeção COVID-19 como uma pandemia mundial. O vírus é transmitido por inalação ou contato direto com gotículas infectadas, o período de incubação varia entre 1 a 14 dias, os contaminados podem ser assintomáticos e ainda assim transmitir a doença (ESTEVÃO, 2020).

Os sintomas mais frequentes são febre, tosse, dispneia, mialgias e fadiga. Estima-se que aproximadamente 80% dos doentes desenvolvam doença leve, 14% doença grave e 5% doença crítica. A mortalidade da doença é muito mais elevada em doentes em estágio grave, em pacientes idosos e com comorbilidades, variando a taxa de mortalidade de 2 a 3%. A propagação da doença tem um crescimento muito superior à capacidade de resposta eficaz dos serviços saúde. O diagnóstico precoce e isolamento social são medidas que podem controlar os níveis de infecção da doença (ESTEVÃO, 2020).

No Brasil, o Ministério da Saúde confirmou, em fevereiro de 2020, o primeiro caso do novo coronavírus no estado de São Paulo. Tratava-se de homem de 61 anos, com histórico de viagem para Itália, na região da Lombardia. Já a Bahia, o quarto estado mais populoso do país, confirmou o primeiro caso da COVID-19, em março de 2020, na cidade de Feira

de Santana, o qual foi importado da Itália. 25 dias depois o estado já contava com 217 casos confirmados, 2 óbitos e 4.279 casos em investigação. Até o dia 14 de janeiro de 2021, foram confirmados 523.068 casos e 9.543 óbitos (MACHADO; BATISTA; SOUZA, 2021).

A região Nordeste concentrou no início da pandemia 15,3% de casos e esteve entre a principal carga geral de internações nas Unidades de Terapia Intensiva, com mortalidade hospitalar alta e agravada pelas disparidades regionais do sistema de saúde, sendo a segunda região do país em maior número de casos, superada apenas pela região Sudeste. A Bahia possui 417 municípios distribuídos em uma área territorial de 564.760,427 km^2. Sua população estimada é de 14.930.634 pessoas, com densidade demográfica de 24,82 hab/km^2 e Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de 0,660, considerado médio. Divide-se em 28 Regiões de Saúde que se aglutinam em 9 Macrorregiões de Saúde, correspondendo ao espaço geográfico de 09 Núcleos Regionais de Saúde (ROCHA et al., 2021).

O Ministério da Saúde no Brasil usou mecanismos virtuais para a divulgação dos dados da pandemia. Estes dados eram fornecidos pelas Secretarias Estaduais de Saúde e os gráficos eram atualizados diariamente com as informções acerca dos números de infectados, óbitos, curas e acompanhamentos. O país desde o início já se encontrava em fase exponencial de crescimento da doença. Com isso se tornou o epicentro da pandemia e o distanciamento social foi uma ferramenta que ajudou a controlar a curva de mortalidade de país.(ARAUJO; EICHLER, 2022).

Em 5 de maio de 2023, depois de três longos anos, com cerca de sete milhões de mortos em todo o mundo, a OMS decreta o final do estado de emergência em saúde pública de importância internacional para a pandemia da COVID-19. O anúncio foi feito pelo presidente da OMS, Tedros Adhanom, que declarou basear-se em recomendações do corpo técnico da entidade, dizendo que era o momento adequando para que os países fizessem a transição do modo de emergência para técnicas de controle da COVID-19 juntamente com outras doenças infecciosas (NOGUEIRA, 2023). Em 26 de abril de 2023, o Brasil acumulava 701.494 vítimas da doença. Conforme os dados da OMS, o Brasil foi o segundo país que mais registrou mortes para a doença (sob a ótica de números absolutos), ficando atrás apenas dos Estados Unidos. Já na Bahia, até fevereiro de 2023, estimasse que cerca de 31.395 pessoas morreram em decorrência da COVID-19 (BAHIA, 2021a).

Capítulo 5

Resultados e Considerações Finais

5.0.1 Resultados

As informações dos próximos parágrafos são baseadas nas notícias extraídas de (BAHIA, 2021b), e estão relacionadas ao período das primeiras 15 semanas de 2021, período escolhido para análise e comparação dos dados apresentados ao modelo SIR que veremos mais adiante na seção 5.5. O gráfico da Figura 5.1 mostra o período da décima quarta semana de 2020 até a trigésima quinta semana de 2022. Já na figura 5.2, o gráfico traz o intervalo entre a primeira e décima quinta semana de 2021.

No primeiro dia da semana de 2021 no estado da Bahia, foram registrados 1.284 casos da COVID-19 (taxa de crescimento de +0,3%) e 1.519 recuperados (+0,3%). A vigilância epidemiológica estadual considerou um paciente recuperado após 14 dias do início dos sintomas da COVID-19. Já os casos ativos eram resultados do seguinte cálculo: número de casos totais, menos os óbitos, menos os recuperados. Os cálculos foram realizados de modo automático. Os casos confirmados ocorreram em 417 municípios baianos, com maior proporção em Salvador (22,51%). Os municípios com os maiores coeficientes de incidência por 100.000 habitantes foram Ibirataia (10.338,30), Muniz Ferreira (8.434,38), Conceição do Coité (8.432,41), Jucuruçu (8.152,53), Pintadas (8.019,55).

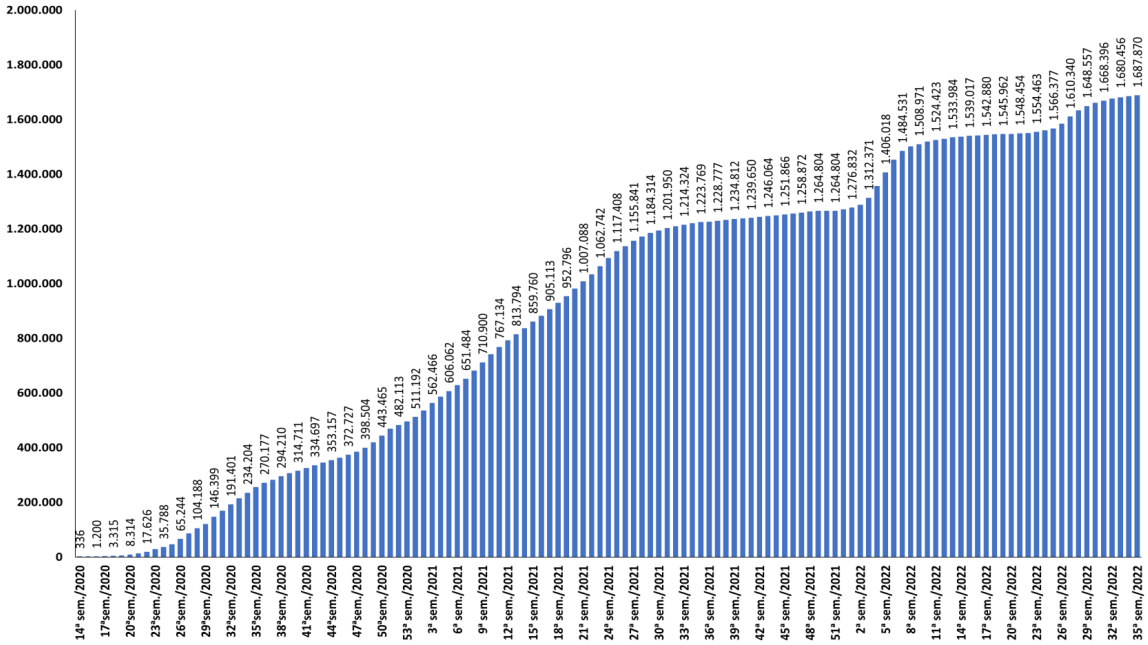
As primeiras doses da vacina contra a COVID-19 chegaram na quarta semana de 2021, e acabaram sendo enviadas para os 417 municípios baianos. As primeiras doses foram aplicadas em profissionais de saúde, indígenas aldeados, idosos em instituições de longa permanência e pessoas com deficiência. Durante esta semana a taxa de crescimento de infectados teve o aumento (+0,8%).

Na sétima semana de 2021, o estado da Bahia decretou toque de recolher na maioria dos municípios, com índices altos de ocupação nos leitos de UTI para COVID-19, restrição de circulação de pessoas nas ruas e funcionamento de serviços não essenciais após as 22h até às 5 da manhã. A Bahia alcançava uma taxa de 74% de ocupação dos leitos de UTI dedicados para atender pacientes com casos mais graves da COVID-19. Nesta fase os dados indicavam um risco real de colapso do sistema de saúde e consequente aumento na

mortalidade. As medidas de distanciamento social eram medidas que poderiam minimizar as altas taxas de transmissão do vírus.

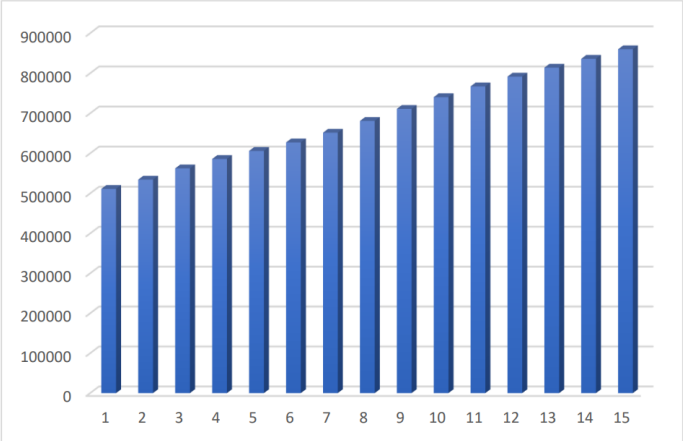
Na décima quinta semana de 2021 a Bahia atinge a marca de 17 mil mortes, sendo contabilizada a semana com maiores números de mortes em 24 horas. Este total de óbitos é representando uma letalidade de 1,99%. Dentre os óbitos, 55,44% ocorreram no sexo masculino e 44,56% no sexo feminino. Em relação ao quesito raça e cor, 54,68% corresponderam a parda, seguidos por branca com 21,85%, preta com 15,29%, amarela com 0,48%, indígena com 0,13% e não há informação em 7,57% dos óbitos. O percentual de casos com comorbidade foi de 65,79%, com maior percentual de doenças cardíacas e crônicas (73,78%).

Figura 5.1: Distribuição do acumulado de casos confirmados de COVID-19 por semana epidemiológica Bahia, 2020-2021.



Fonte: (BAHIA, 2021a)

Figura 5.2: Progressão da Infecção por COVID-19 na Bahia nas Primeiras 15 Semanas



Fonte: Autoria própria

Com os dados retratados acima, referentes aos totais de infectados pela COVID-19 na Bahia, executou-se o processo para obter o valor de β, taxa de infecção, para o período escolhido das 15 primeiras semanas de 2021. Para este ajuste, foi necessário definir os dados a partir do número de infectados na primeira semana de 2021, escolher uma taxa que otimizasse o processo, baseado inicialmente na taxa de recuperação $\gamma = 0,1$, onde cada indivíduo levaria 10 dias para se recuperar, visto em (FRANCO; DUTRA, 2020), aproximando então para $\gamma = 0,15$. Consequentemente, o tempo de mudança de cada período correspondeu ao número de passos utilizados na função de otimização.

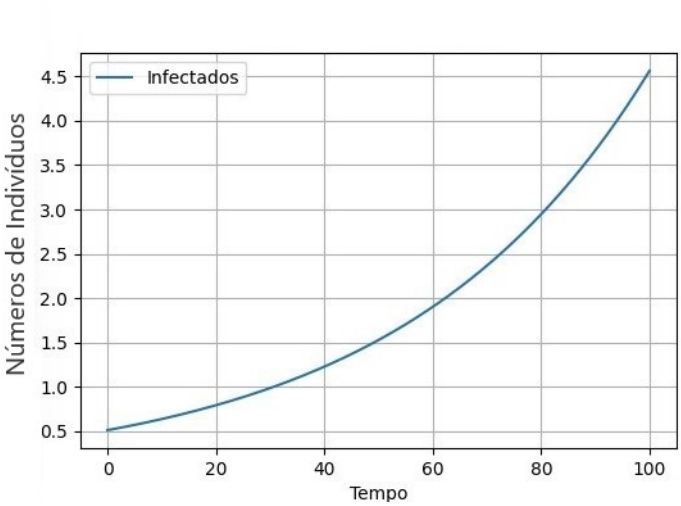
A função base se originou a partir da solução do sistema de equações (4.16), executado via biblioteca Matplotlib, através do método numérico de resolução Runge-Kutta, de forma a aproximar os resultados das diferenciais com os dados de infectados, até achar uma curva suficientemente próxima da curva obtida dos dados reais fornecidos pela SESAB. Foram realizadas 1000 iterações até encontrar um valor próximo aos dados reais desejados. Neste sentido após as iterações consideramos os seguintes dados na Tabela 5.1:

Tabela 5.1: **Dados para simulação do Modelo SIR no estado da Bahia**

$0,171891162$	Taxa de infecção (β)
$0,15$	Taxa de Recuperação (γ)
14.873.064	População Total N no tempo t_0
$S = N - I$	População Suscetível (S) no tempo t_0
511.192	População Infectada (I) no tempo t_0
0	População recuperada R no tempo t_0
0.1	Tamanho do passo (h)
1000	Número de iterações

Através dos dados estabelecidos na Tabela 5.1, encontramos a seguinte curva na Figura 5.3, referente às 1000 iterações do programa.

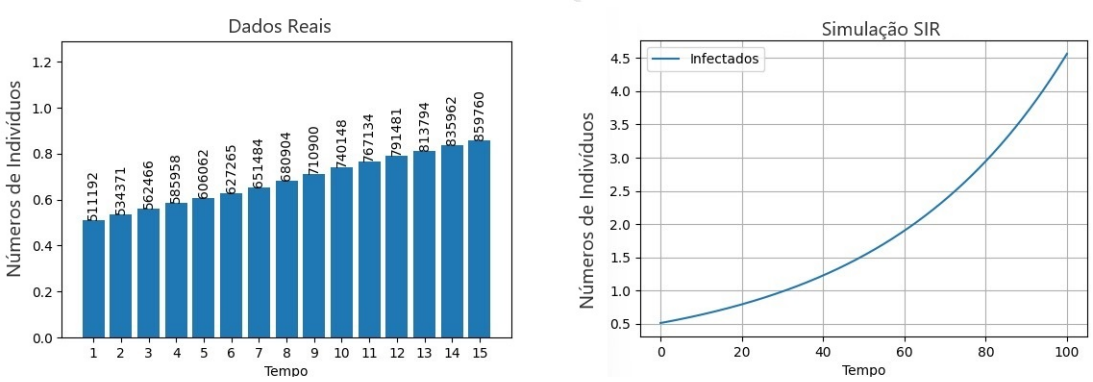
Figura 5.3: Simulação do Modelo SIR para Infectados (COVID-19 BAHIA)



Fonte: Autoria própria

A Figura 5.4 mostra a comparação da COVID-19 na Bahia e os resultados obtidos em função do sistema de equação SIR com os dados previstos na Tabela 5.1, os resultados do tempo no intervalo entre 0 e 20 no gráfico da simulação equivale às primeiras semanas de infecção.

Figura 5.4: Dados reais e simulação SIR Infectados (COVID-19 BAHIA)

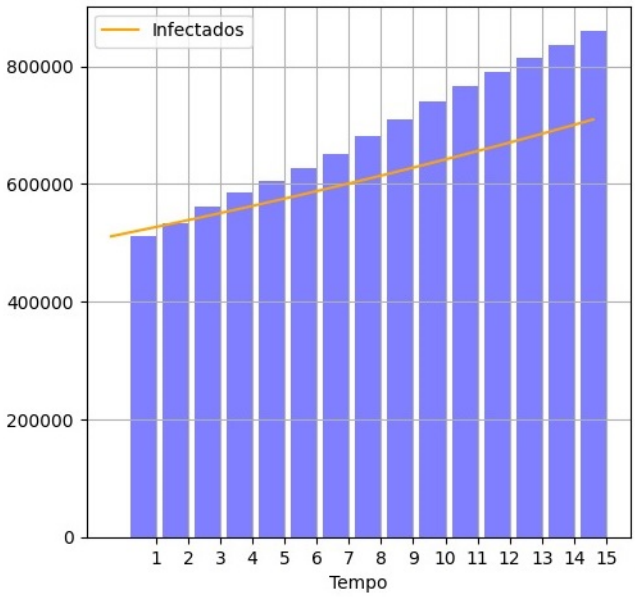


Fonte: Autoria própria

A Figura 5.5 mostra a projeção da COVID-19 na Bahia, utilizando os parâmetros reportados na Tabela 5.1. O gráfico de barras representa os dados reais fornecidos pela SESAB, enquanto o gráfico representado pela curva, refere-se aos valores obtidos no modelo SIR. Observa-se que o parâmetro β foi obtido no período em que as medidas de isolamento social já tinham sido impostas. Os gráficos foram simulados no período de 15

semanas a partir de 01 de janeiro de 2021 até 16 abril de 2021, um dos períodos mais críticos da COVID-19 na Bahia (BAHIA, 2021b). O tempo $t_0 = 0$ representa na figura o dia 01 de janeiro de 2021, iniciando com 511192 infectados.

Figura 5.5: Comparação entre Dados Reais e Simulação do Modelo Epidemiológico SIR de Infectados por COVID-19 no estado da Bahia



Fonte: Autoria própria

Destaca-se que este resultado na Figura 5.5 é uma projeção do modelo SIR e, portanto, não é exato, principalmente em períodos mais distantes. Em qualquer estimativa matemática é fundamental possuir os dados reais; por isso, deve levar em consideração que os dados fornecidos pelos boletins epidemiológicos do estado da Bahia podem ser maiores que os números registrados. Além disso, a dinâmica da doença pode também sofrer alterações em função das vacinas, medicamentos, entre outras medidas de proteção.

5.0.2 Considerações Finais

Apresentamos nesta pesquisa as Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações à área da Epidemiologia, através de uma análise sobre Equações Diferenciais, Modelagem Matemática e Epidemiologia, com aplicação em modelos compartimentais epidemiológicos do tipo SIS, SIR e SEIHR. Estes modelos servem como indicadores, para simular como um modelo epidemiológico pode ser formulado, e a partir dele, fazer projeções e análises. Desse modo, analisamos nesta pesquisa que modelagens matemáticas definidas mediante dados numéricos podem ser essenciais para coleta e análise de dados precisos e abrangentes em consonância com a epidemiologia, ou até mesmo para outras ciências.

Neste trabalho, foi reproduzido um modelo matemático epidemiológico compartimental SIR, por meio de uma simulação computacional, especificamente a pandemia da COVID-19 no estado da Bahia, nas 15 primeiras semanas do ano de 2021. Apesar das várias técnicas de resoluções apresentadas relativas às soluções das equações diferenciais, os métodos analíticos não se apresentaram tão práticos quanto o método de solução numérico de Runge-Kutta, no que tange à projeção da simulação do modelo SIR.

Para aplicação do modelo compartimental adotado, houve a necessidade de otimizar alguns parâmetros utilizados, em função de buscar aproximar das estimativas reais projetadas nos boletins epidemiológicos do estado da Bahia. Ainda assim, quantificou-se a eficácia no aumento de números de infecções, permitindo, deste modo a previsão de resultados para períodos futuros com uma fidelidade aproximada. Dessa forma, os resultados podem estabelecer estratégias que contribuam no combate de doenças epidêmicas. Ainda que o modelo seja uma versão simples compartimental, visto que a COVID-19 pode apresentar um número maior de variáveis, como apresentou o modelo compartimental SEIHR. No entanto, estes modelos que se aproximam mais da realidade e envolvem mais variáveis, e assim mais equações, acabam se tornando complexos em suas soluções.

A modelagem matemática pode auxiliar na obtenção dados numéricos eficazes na projeção de infecções de doenças transmissíveis. Assim como a epidemiologia funciona com uma ciência fundamental para analisar métodos de controle e prevenção destas doenças. Portanto, ao associar a epidemiologia a modelos matemáticos que traduzam sua base em hipóteses capazes de quantificar aspectos dos fenômenos biológicos, pode-se oferecer uma abordagem abrangente para entender e combater doenças. Essa colaboração pode ser essencial para otimizar as estratégias de saúde pública, melhorar a resposta a epidemias e pandemias, e, em última instância, salvar vidas.

Referências Bibliográficas

ARAUJO, L. G. Lucho de; EICHLER, M. L. O descaso epistêmico diante da pandemia de COVID-19 no Brasil. *Revista Thema*, Pelotas-RS, v. 21, n. 1, p. 174 – 189, abr. 2022. Acessado: 06 jun. 2023. Disponível em: <https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/2184>.

AZEVEDO, K. d. *Equações Diferenciais aplicadas à epidemiologia*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021.

BAHIA. Municípios e regionalização. *Secretária da Saúde*, Salvador, BA, 2017. Acessado: 17 jun. 2023. Disponível em: <https://www.saude.ba.gov.br/municipios-e-regionalizacao/>.

_____. Boletins covid-19. *Secretária da Saúde*, Salvador, BA, 2021. Acessado: 23 mar. 2023. Disponível em: <https://www.saude.ba.gov.br/temasdesaude/coronavirus/boletins-diarios-covid-19/>.

_____. Notícias. *Secretária da Saúde*, Salvador, BA, 2021. Acessado: 16 jun. 2023. Disponível em: <https://www.saude.ba.gov.br/noticias/>.

BASSANEZI, R. C. *Introdução ao cálculo e aplicações*. Editora Contexto: São Paulo - Brasil, 2015.

_____. *Modelagem Matemática: teoria e prática*. Editora Contexto: São Paulo - Brasil, 2015.

BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. 1. ed. Vila Mariana-SP: Editora HARBRA ltda, 1988.

BASSO, M. et al. Educação tecnológica e/na educação matemática aplicações da matemática elementar na sala de aula ou "focinho de porco não é tomada". *Informática na educação: teoria prática*, v. 2, Out. 1999.

BOTELHO, J. M.; CRUZ, V. A. G. da. *Metodologia científica*. Pearson Education do Brasil, 2013. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=f2f2ff673cbc9e36b284fbafd725e5df>.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro-Brasil: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2011.

DUARTE, P. M. COVID-19: Origem do novo coronavírus/ COVID-19: Origin of the new coronavirus. *Brazilian Journal of Health Review*, v. 3, n. 2, p. 35853590, Abr. 2020. Acessado: 06 jun. 2023. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BJHR/article/view/9131>.

ESTEVÃO, A. COVID-19. *Acta Radiológica Portuguesa*, v. 32, n. 1, p. 5–6, Jan - Abr. 2020. Acessado: 06 jun. 2023. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/actaradiologica/article/view/19800>.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Campinas-SP: Editora Unicamp, 2011.

FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

FLORES, M. M. L. et al. *Equações Diferenciais e Modelos Epidemiológicos*. Editora do IMPA: Brasil, 2021.

FRANCO, C. M. R.; DUTRA, R. F. Modelos matemáticos em Epidemiologia e apalicação na evolução da COVID-19 no Brasil e no estado da Paraíba. *Educação Ciência e Saúde*, v. 7, n. 1, p. 1–20, jan./jun. 2020.

GONICK, L. *Cálculos em quadrinhos*. 1. ed. São Paulo-SP: Editora Edgard Blücher Ltda. Tradução de Marcelo Alves, 2014.

KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. de L. Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização. *Revista de investigaciones UNAD*, v. 14, n. 2, p. 55–73, 2015.

LUIZ, M. H. R. *Modelos Matemáticos em Epidemiologia*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro-SP, 2012.

MACHADO, A. G.; BATISTA, M. d. S.; SOUZA, M. C. de. Características epidemiológicas da contaminação por COVID-19 no estado da Bahia. *Revista Enfermagem Contemporânea*, Salvador-BA, v. 10, n. 1, p. 103 – 110, abr. 2021. Acessado: 06 jun. 2023. Disponível em: <https://www5.bahiana.edu.br/index.php/enfermagem/article/view/3594>.

MALAGUTTI, R.; EISENCRAFT, M. Modelo epidêmico SEIHR aplicado à COVID-19 na cidade de São Paulo. jun. 2021.

MELLO, R. A. de; KANETA, C. N.; SOUZA, C. de. *Manual de Produção Acadêmica: tipos, normas, métodos e modelos*. 1. ed. São Paulo-SP: Complexo Educacional Faculdades Metropolitanas Unidas, 2013.

MOL, R. S. *Introdução à História da Matemática*. 1. ed. Universidade Federal de Minas Gerais: CAED-UFMG, 2013.

NIU, R. et al. Modeling the COVID-19 Pandemic Using an SEIHR Model With Human Migration. *IEEE Access*, v. 8, p. 1311–1323, Out. 2020.

_____. A stochastic SEIHR model for COVID-19 data fluctuations. *Nonlinear Dynamics*, v. 106, n. 2, p. 195503–195514, Jul. 2021.

NOGUEIRA, P. Fim da emergência de saúde pública para a COVID-19 decretado pela OMS não implica término da pandemia, alerta pesquisadora da Unesp. *Jornal da UNESP*, São Paulo-SP, mai. 2023. Acessado: 10 jun. 2023. Disponível em: <https://encr.pw/DLzQp>.

ROCHA, B. V. da et al. Óbitos e casos confirmados de COVID-19 na Bahia: descrição do perfil clínico e epidemiológico. *Revista de Saúde Coletiva da UEFS*, v. 11, n. 2, p. e7260–e7260, 2021.

ROCHA, D. I. C. *Modelos Matemáticos Aplicados à Epidemiologia*. Dissertação (Métodos Quantitativos em Economia e Gestão) — Departamento de Matemática e Informática da Faculdade de Economia da Universidade do Porto, Porto-Portugal, 2012.

SECO, L.; PATRÃO, M. *Equações Diferenciais Ordinárias e Séries de Potências*. 1. ed. Brasília-DF: Universidade de Brasília, 2018.

SODRÉ, U. *Equações Diferenciais Ordinárias: Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil*. Notas de Aula: Universidade Estadual de Londrina, 2003. Acessado em: 08 de nov. de 2022. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/edo/edo0.html>.

STEWART, J. *Cálculo*. 6. ed. Brasil: Volume 2, 2009.

YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. *Equações Diferenciais*. 1. ed. Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância: UFBA- Universidade Federal da Bahia, 2017.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. Tradução: Antonio Zumpano. v.1. 3. ed. São Paulo - SP: Pearson Makron Books, 2010. v. 1.

_____. _____. Tradução: Alfredo Alves de Farias. v.2. 3. ed. São Paulo - SP: Pearson Makron Books, 2011. v. 1.