

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

***Campus* Valença**

Carolaine Costa Morais

Cálculo mental nos anos finais do ensino fundamental: uma análise sobre sua abordagem em livros didáticos de matemática

Valença – BA

2026

Carolaine Costa Morais

Cálculo mental nos anos finais do ensino fundamental: uma análise sobre sua abordagem em livros didáticos de matemática

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, *Campus* Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Roque da Silva Lyrio

Valença – BA

2026

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DO IFBA, COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

M827c Morais, Carolaine Costa

Cálculo mental nos anos finais do ensino fundamental: uma análise sobre sua abordagem em livros didáticos de matemática / Carolaine Costa Morais; orientador Roque da Silva Lyrio -- Valença : IFBA, 2026.

71f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal da Bahia, 2026.

1. Cálculo mental. 2. Matemática: Ensino fundamental. 3. Livro didático. I. Lyrio, Roque da Silva, orient. II. TÍTULO.

CDD:510.07

AGRADECIMENTOS

Em português, costumamos dizer: “Eu consegui!”. Mas, biblicamente, dizemos: “Para que todos vejam, e saibam, e considerem, e juntamente entendam que a mão do Senhor fez isso” (Isaías 41:20). É com esse versículo que inicio meus agradecimentos, reconhecendo que, sem Deus nada disso seria possível.

Aproveito para agradecer também à minha família, meu alicerce, em especial à minha mãe, Nilza Souza, meu porto seguro, para onde sempre desejo voltar quando as coisas não vão bem. E durante este curso, voltei muitas vezes e, em todas elas, fui acolhida por seu amor e cuidado. À minha irmã Claudineia Morais, que foi fundamental durante todo esse processo; seu apoio me fez acreditar que eu seria capaz. Ao meu pai, Carlito de Oliveira, por todo o apoio, meu sobrinho, Tiago Morais e aos meus irmãos, Antonio Júnior, Thayla Morais e Sofia Morais, por todo o companheirismo. Não poderia deixar de agradecer também à minha tia Adriana Costa, por ter me acolhido como uma filha em sua casa. Ao meu namorado, Macel Bulhões, por todo o incentivo, acolhimento e apoio ao longo dessa caminhada.

Ao meu orientador, Roque Lyrio, que me acompanhou, ajudou e incentivou durante todo esse processo, me instruindo da melhor forma possível. Sua dedicação e compromisso foram fundamentais para a realização deste trabalho, e sua atuação profissional tornou-se uma referência que desejo seguir como exemplo.

Agradeço também aos professores Diogo Dórea e Marcelo Lino, por aceitarem participar da minha banca examinadora e por contribuírem com melhorias significativas para este trabalho. Além da competência e maestria com que exercem à docência, são profissionais que admiro e que também se tornaram inspirações para mim.

Aos meus amigos, que formaram comigo um elo forte e foram fundamentais para que eu permanecesse firme durante esse processo, deixo minha sincera gratidão. Em especial, agradeço a Noelí Carvalho, Jackson Silva, Henrique Carvalho, Erick Silva, Bruna Lisboa, Iasmin Fonseca, Karoline, Geisivan, Anderson Guilherme, Jackson, Maria Elysa, José Jorge, Danilo, Gleiciene, Joseane, Germano e Emile. Cada um, à sua maneira, contribuiu para tornar essa caminhada mais leve e especial.

Por fim, agradeço ao IFBA, que se tornou uma segunda casa para mim, e a todo o seu corpo docente, que foi fundamental para minha formação acadêmica e profissional.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo fazer uma análise da abordagem do cálculo mental em livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental. Parte-se da premissa de que o cálculo mental é uma habilidade que promove autonomia e senso crítico aos alunos nas resoluções de problemas. A pesquisa se baseia em uma revisão bibliográfica, utilizando livros e artigos. Inicialmente é apresentada fundamentação teórica sobre a origem e evolução dos números, bem como o desenvolvimento dos sistemas de numerações. Em seguida discute-se o conceito de cálculo mental, as competências de cálculo e a importância do ensino do cálculo mental, além de fazer uma exploração da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para mostrar como o cálculo mental deve ser abordado no currículo escolar. Por último faz-se uma análise para entender como o cálculo mental é abordado nos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental, verificando o atendimento ao estabelecido na BNCC.

Palavras-chave: cálculo mental; livro didático; ensino fundamental.

ABSTRACT

This study aims to analyze the approach to mental calculation in mathematics textbooks for the final years of elementary school. It starts from the premise that mental calculation is a skill that promotes autonomy and critical thinking in students' problem-solving abilities. The research is based on a literature review, using books and papers. Initially, a theoretical foundation is presented on the origin and evolution of numbers, as well as the development of number systems. Next, are descussed the concept of mental calculation, calculation skills, and the importance of teaching mental calculation, in addition to exploring the Brazilian National Curriculum Base (BNCC) to show how mental calculation should be approached in the school curriculum. Finally, an analysis is conducted to understand how mental calculation is addressed in mathematics textbooks for the final years of elementary school, verifying compliance with the established in BNCC.

Keywords: mental calculation; textbook; elementary school.

Lista de Figuras

Figura 1 - Formas primitivas de contagem 12
Figura 2 - Osso de Ishango com entalhes, ilustrando formas de contar primitivas 13
Figura 3 - Homens de contar 14
Figura 4 - Fundamentação da matemática moderna 15
Figura 5 - Sistema de numeração grego 17
Figura 6 - Sistema de numeração babilônico 19
Figura 7 - Representação do zero 20
Figura 8 - Grafia dos algarismos romanos arcaicos 21
Figura 9 - Grafia dos algarismos romanos etrusca 21
Figura 10 - Representações etruscas dos números 19 e 38 22
Figura 11 - Numeração escrita e rudimentar hindu 22
Figura 12 - Numeração hindu por extenso 23
Figura 13 - Mudanças na grafia do sistema indo-arábico 24
Figura 14 - Grafia no sistema de numeração maia 25
Figura 15 - Hieróglifos egípcios 26
Figura 16 - Calculadora Pascalina, criada pelo matemático francês Blaise Pascal 32
Figura 17 - Capa do livro da Coleção Geração Alpha 6° ano 44
Figura 18 - Capa do livro da Coleção Geração Alpha 7° ano 49
Figura 19 - Capa do livro da Coleção Geração Alpha 8° ano 53
Figura 20 - Capa do livro da Coleção Geração Alpha 9° ano 56

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **8**
1 A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS **10**
1.1 O surgimento dos números **10**
1.2 O processo de contagem **12**
1.3 Bases **15**
1.4 Sistema de numeração **17**
1.4.1 Sistema de numeração babilônico 19
1.4.2 Sistema de numeração romano 20
1.4.3 Sistema de numeração indo-arábico 22
1.4.4 Sistema de numeração maia 24
1.4.5 Sistema de numeração egípcio 25
1.5 Números naturais **26**
1.5.1 Operações aritméticas com os números naturais 28
1.6 Números inteiros **29**
2 CÁLCULO MENTAL **31**
2.1 Modalidades de cálculo **33**
2.2 Importância do ensino do cálculo mental sob a perspectiva da BNCC **34**
2.3 Estratégias de cálculo mental com números naturais **36**
2.3.1 Decomposição de números 36
2.3.2 Compensação 37
2.3.3 Fatoração 39
2.3.4 Subtrações sucessivas 39
2.4 Estratégias de cálculo mental com números não negativos **39**
2.4.1 Mobilização de regras memorizadas 40
2.4.2 Utilização de equivalência 40
3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA **41**
3.1 Descrição individualizada dos livros analisados **44**
3.1.1 Descrição do livro Geração Alpha do 6° ano 44
3.1.2 Descrição do livro Geração Alpha do 7° ano 48
3.1.3 Descrição do livro Geração Alpha do 8° ano 52
3.1.4 Descrição do livro Geração Alpha do 9° ano 56
3.2 Análise sobre a abordagem do cálculo mental nos livros didáticos de matemática **59**
3.2.1 Análise do livro Geração Alpha do 6° ano 59
3.2.2 Análise do livro Geração Alpha do 7° ano 63
3.2.3 Análise do livro Geração Alpha do 8° ano 66
3.2.4 Análise do livro Geração Alpha do 9° ano 67
3.3 Conclusão das análises **67**
CONSIDERAÇÕES FINAIS **69**
REFERÊNCIAS **70**

INTRODUÇÃO

A matemática exerce um papel importante na formação dos estudantes, contribuindo diretamente para o desenvolvimento do raciocínio logico, capacidade de resolver problemas, do pensamento crítico, além de promover autonomia na tomada de decisões. Nesse sentido, o cálculo mental pode contribuir nesse processo como uma habilidade fundamental, possibilitando que o aluno desenvolva suas próprias estratégias e analisar diferentes caminhos para chegar a um resultado.

O cálculo mental exerce um papel importante no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, contribuindo de forma significativa para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia, tomadas de decisões e da capacidade de resolver problemas. Essa relevância pode ser evidenciada pelas contribuições apontadas pelas orientações presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destacam a importância do desenvolvimento de estratégias de cálculo, da estimativa, do raciocínio e da resolução de problemas ao longo da Educação Básica.

Para alcançar esse objetivo, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos: compreender o conceito de cálculo mental e a sua importância para o ensino da matemática; identificar as principais estratégias de cálculo mental; verificar de que maneira o cálculo mental é abordado, de forma explícita ou implícita, nos livros didáticos analisados; e relacionar as abordagens identificadas nas obras com as orientações e habilidades previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para os anos finais do Ensino Fundamental.

A pesquisa desta monografia é qualitativa, realizada por meio de revisão bibliográfica e análise documental. A revisão bibliográfica, segundo Gil (2002), utiliza materiais já elaborados como livros e artigos científicos, e foi fundamental para construir o referencial teórico sobre cálculo mental, sua importância no ensino de matemática e sua presença nas orientações curriculares. Autores como Struik, Caraça, Ifrah e outros foram citados para abordar a origem e desenvolvimento dos números, enquanto pesquisadores como Conti, Nunes e Carvalho discutem o desenvolvimento de competências e estratégias no cálculo mental.

Além disso, a pesquisa inclui análise documental, focando em livros didáticos de matemática do ensino fundamental, que são examinados como fontes primárias ainda pouco investigadas na abordagem do cálculo mental. O estudo é qualitativo pois busca interpretar como o cálculo mental é explorado nesses materiais, privilegiando a compreensão ao invés de dados numéricos

O trabalho é subdividido em quatro capítulos. No capítulo de número 1, é apresentado

um breve histórico a respeito da evolução dos números, assim como o seu surgimento, além dos diferentes sistemas de numerações existentes. O capítulo 2, inicia com a discussão entre alguns autores a respeito da definição do cálculo mental, bem como sua importância e as principais estratégias utilizadas nesse processo. E no terceiro, são realizadas as análises das obras, que tem como ponto principal identificar com o cálculo mental é explorado nos anos finais do ensino fundamental e fazer uma ligação dessas, com o que é previsto pela BNCC, referente a essa habilidade para os anos finais do ensino fundamental.

As análises dos livros didáticos foram realizadas a partir das coleções utilizadas na Escola Municipal Augusta Messias Guimarães e na Escola Municipal Padre José de Souza, ambas localizadas na zona urbana de Valença. A escolha dessas instituições deve-se à parceria com o IFBA – Campus Valença, por meio dos estágios supervisionados em Matemática e do PIBID, no subprojeto de Matemática. Por fim, no último capítulo, são apresentadas as considerações finais, retomando os principais resultados e reflexões construídos ao longo da pesquisa, especialmente no que refere á abordagem do cálculo mental nos livros didáticos analisados.

1 A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS

Esse capítulo tem por objetivo elucidar o leitor a respeito do surgimento dos números bem como o processo de contagem, os diferentes sistemas de numerações e os conjuntos numéricos. Inicialmente é realizada uma contextualização histórica dos números, trazendo à tona a discussão da relação entre as necessidades sociais e o desenvolvimento dos números. Em seguida, são discutidos os diferentes sistemas de numerações, a exemplo do babilônico, indo-arábico, egípcio dentre outros, evidenciando suas principais características e contribuições históricas.

1.1 O surgimento dos números

Embora os números sejam utilizados frequentemente no nosso dia, para ver as horas nos relógios, nas medidas de altura e peso, nas relações comerciais, no pagamento de contas, dentre outros, o conceito de número não é algo recente. De acordo com Struik (1992), as primeiras ideias de números são tão antigas, que datam do começo da idade da pedra[1] no período paleolítico[2]. Durante essa época os homens viviam em cavernas, em condições similares às de outros animais, e sua principal atividade era recolher alimento. Eles faziam instrumentos para caça e pesca e desenvolveram linguagens para se comunicar uns com os outros. Conforme o tempo foi passando, os homens deixaram essa forma primitiva de viver só da caça e pesca, passando a praticar a agricultura, marcando assim, a transição do período paleolítico para o neolítico[3] (STRUIK, 1992). Ainda segundo o autor, os únicos números que essas civilizações antigas conheciam até então eram o um e o dois. À medida que as concepções de números foram se alargando, os números maiores que um e dois eram formados por meio da adição. O três, por exemplo, equivalia à soma do 1 com 2, o quatro era a soma do 2 com 2, o cinco era a soma do 2 com 3.

Nesse contexto, Caraça (1951) afirma que se o homem vivesse isolado, a necessidade da contagem não diminuiria, visto que ele precisaria mensurar a quantidade de alimentos que possuía, a sucessão dos dias, entre outros problemas que exigissem dele uma contagem mais rudimentar. No entanto, conforme a vida social vai se ampliando e as relações de trocas entre

[1] Período da pré-história de 2,5 milhões de anos atrás em que o povo vivia como nômade (GOMES, 2017).
[2] Período inicial da idade da pedra de 2,5 milhões de anos atrás, caracterizado pela utilização da pesca e caça (GOMES, 2017).
[3] Período final da idade da pedra de 2,5 milhões de anos atrás, caracterizado pela agricultura e formação das primeiras aldeias (GOMES, 2017).

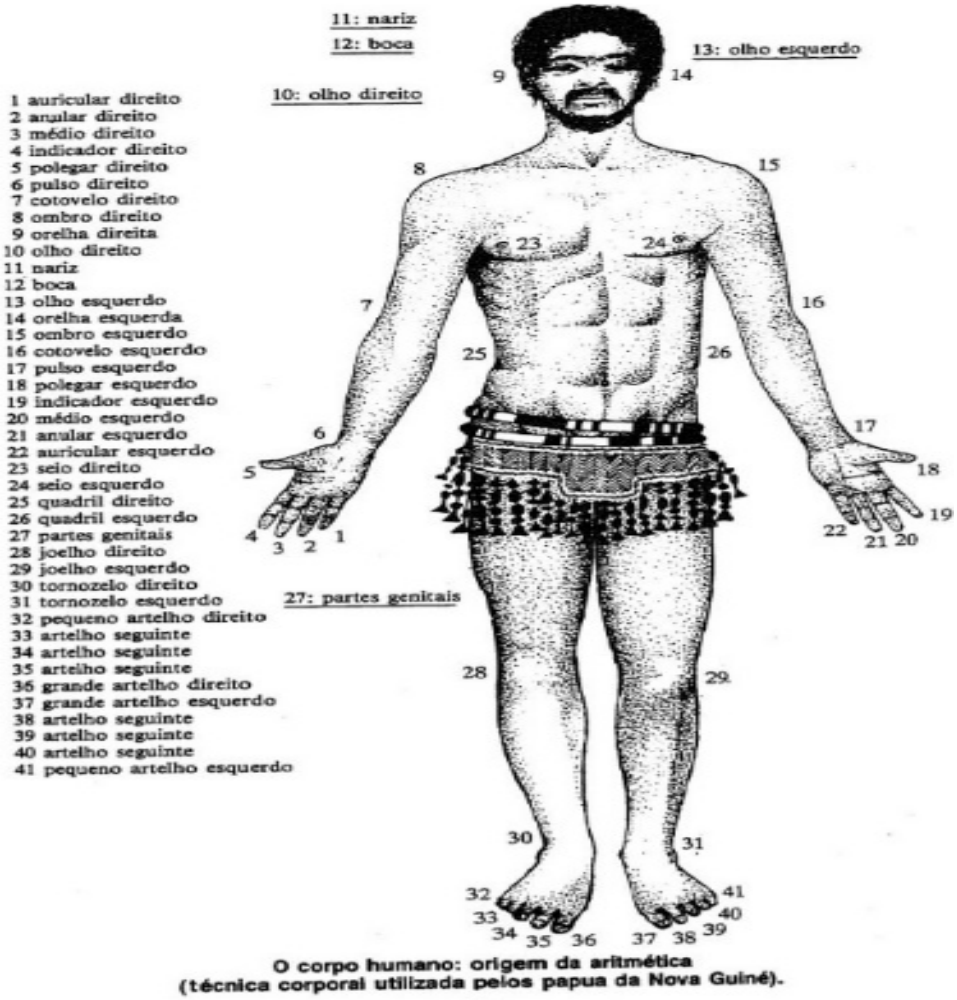
os homens se intensificando, a contagem se impõe cada vez mais como uma necessidade urgente.

Corroborando com o posicionamento de Caraça, Ifrah (1981) destaca que sem dúvida a invenção dos números deve ter correspondido à ordem prática e à vida em sociedade. Aqueles povos que guardavam rebanhos de cabras ou carneiros, por exemplo, no final do dia precisavam saber se todos os animais tinham retornado para o curral. Os que praticavam trocas e vendas, deveriam saber avaliar para poder trocar a mercadoria com outra pessoa. Nesse caso, para ter esse controle, utilizavam uma correspondência biunívoca, estabelecendo assim uma relação de um a um entre os animais do rebanho com as partes do corpo. De fato, como afirma o autor Eves:

> É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer *mais* e *menos* quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. [...] É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca (EVES, 2011, p. 25).

Nessa forma de contagem as partes do corpo possuíam nomes como: dedo mínimo da mão direita, dedo anular da mão direita, dedo médio da mão direita, dedo indicador da mão direita, dedo polegar da mão direita, dentre outras. Então cada ovelha era associada a uma parte do corpo. Essa mesma sequência era levada por todos os pastores e era utilizada para contar qualquer rebanho. Como fica evidente na Figura 1, a contagem iniciava pelos dedos da mão direita para somente depois partir para as outras partes do corpo. O povo papua da Nova Guiné conseguiu usar quarenta e uma partes do corpo; algumas tribos mais avançadas conseguiram utilizar até cem partes do próprio corpo.

Figura 1 - Formas primitivas de contagem



Fonte: Ifrah (1981)

Os papuas sabiam fazer uma enumeração, para manter-se a par dos rebanhos, contudo, não dominavam ainda o conceito de conjunto. Quando eles diziam polegar direito não estavam querendo se referir à mão, ou um conjunto completo com cinco objetos. Só sabiam que conforme fosse enumerando os animais iria chegar um momento em que o polegar direito iria ser citado. Com o tempo alguns povos mais atentos devem ter notado que o nome dado ao último número não só atribuiria o nome ao último objeto de uma coleção, como também representava quantos objetos a coleção inteira possuía (GUNDLACH, 1992).

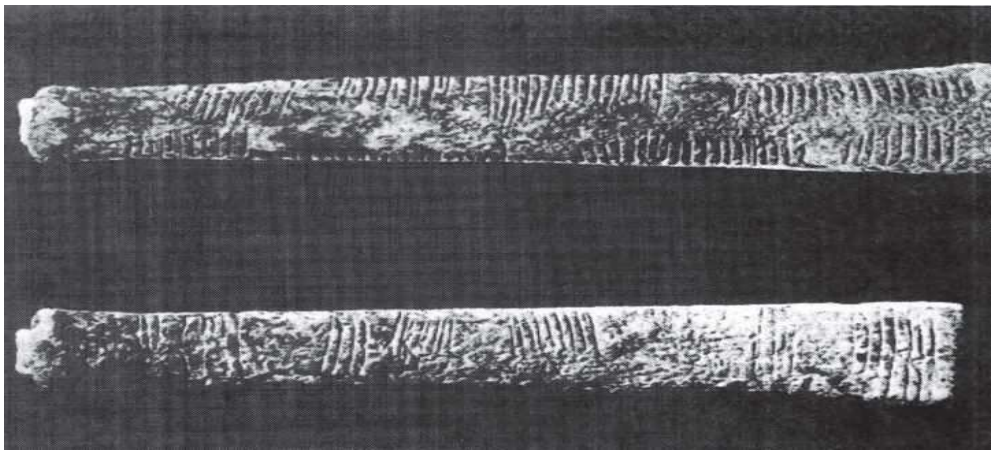
1.2 O processo de contagem

Conforme os rebanhos foram crescendo, houve um momento em que a contagem baseada na associação entre partes do corpo e animais tornou-se limitadas. Com isso, passou-

se a usar outro procedimento, como contar a quantidade de ovelhas que entrava no final da tarde no curral através de entalhes, que eram cortes feitos em ossos. De acordo com Ifrah (1981), os pastores se sentavam na frente das cavernas e esperavam cada um dos animais entrar, e cada vez que entrava um, ele utilizava um seixo[4] e fazia um entalhe no osso. Assim, se o rebanho possuísse 25 animais, por exemplo, eram feitos no osso 25 entalhes. E essa forma de contar facilitava o controle dos animais, já que era fácil perceber se morreu um animal, uma vez que restaria um entalhe sem correspondência bem como, se houvesse o nascimento de um outro animal bastava registrar um novo entalhe no osso.

A Figura 2, retirada do trabalho Eves (2011), mostra o osso de Ishango, um artefato pré-histórico matemático, considerado um dos primeiros exemplos de registro numérico e matemática na história da humanidade. Esse osso possui mais de 8.000 anos e nele é possível ver vários entalhes preservados, ilustrando como o povo da época contava.

Figura 2 - Osso de Ishango com entalhes, ilustrando formas de contar primitivas



Fonte: Eves (2011)

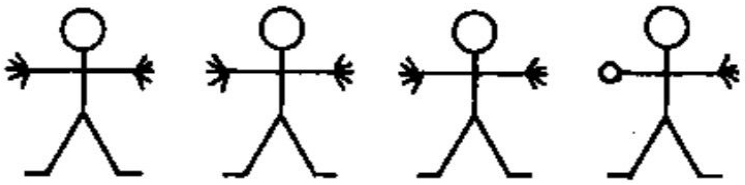
Com o passar do tempo, essa estratégia do entalhe passou a apresentar falhas, pois como afirma Gundlach (1992), “tais objetos, porém, não tinham duas características essenciais de que o homem primitivo necessita – características fornecidas por um conjunto de partes do corpo – ou seja, uma ordem definida e uma finitude absoluta”.

Para resolver esses problemas, as antigas civilizações se utilizaram de um novo método que deu origem aos primeiros sistemas de numeração, os “homens de contar”. Basicamente para fazer a contagem, utilizava os dedos das mãos, ou seja, desenhava na parede um homem

[4] Fragmento de rocha mineral localizado nos leitos dos rios.

com as mãos abertas, por exemplo. Cada dedo levantado significava uma unidade e se as duas mãos estivessem abertas com os dez dedos estirados era porque representava dez unidades. Se precisasse contar por exemplo uma coleção com mais de dez objetos, um novo homem de contar era desenhado junto a outro que tivesse as duas mãos estiradas e abertas, e isso ocorria sucessivamente no caso de coleções maiores (GUNDLACH, 1992).

Figura 3 - Homens de contar



Fonte: Gundlach (1992).

Por exemplo, na Figura 3 temos três homens com as duas mãos abertas e um quarto homem com uma mão aberta e a outra fechada, logo é fácil ver que ele está representando cinco unidades. Então a figura está representando um total de 35 unidades. É perceptível que esse sistema é aditivo e não posicional, pois a ordem dos homens do desenho não irá alterar no resultado.

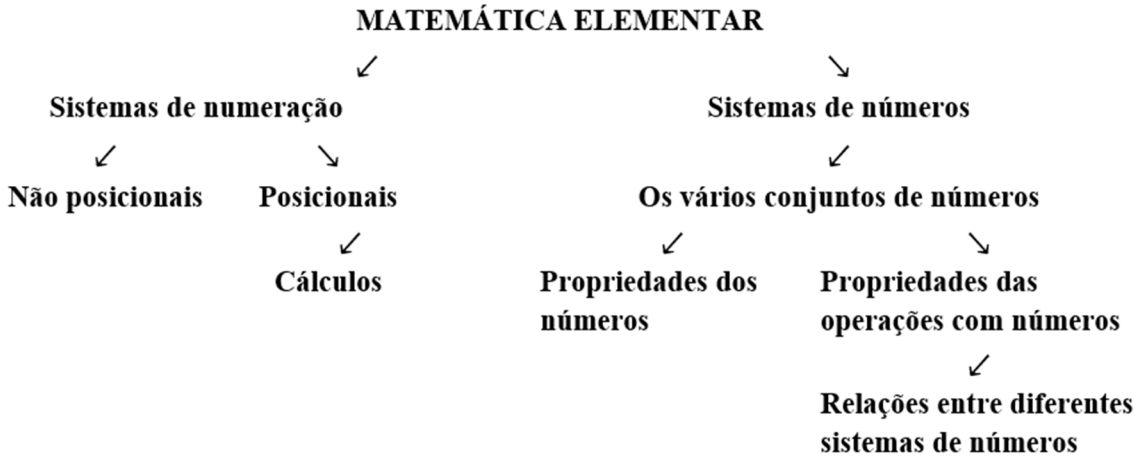
Embora por vezes pareça que a linguagem falada tenha precedido a ideia de símbolos para representar números, não foi exatamente assim que aconteceu. Pois como já foi mencionado nesse trabalho os povos antigos faziam entalhes em ossos, ou seja, mesmo sem ter uma palavra para representar o número um, dois, três e assim sucessivamente, eles conseguiam realizar uma contagem. Apesar de esse processo não ter ocorrido de forma linear a linguagem falada desempenhou um papel fundamental na transição da enumeração para a numeração.

> Nossa tese é de que as enumerações envolveram para a numeração através do uso da linguagem falada e, posteriormente a linguagem escrita. As linguagens também desempenharam um papel primordial na mudança da ênfase matemática da numeração para o número. A estranheza, naturalmente, se deve à falta de uma visão puramente retrospectiva. Do ponto de vista moderno, tende-se a considerar a numeração como ligada a meios de expressar números, isto é, a criação de símbolos para certas ideias. Parecia natural que o conceito de número fosse anterior ao interesse de símbolos para expressar esse conceito. (GUNDLACH, 1992, p. 9)

Apesar desse processo mencionado acima ter ocorrido no passado, a matemática elementar moderna é fundamentada de uma forma diferente, como fica evidente na Figura 4, na qual percebe-se que atualmente diferencia-se o conceito de sistemas de números e sistemas

de numeração. A principal diferença é que a matemática da antiguidade só se desdobrava em duas especulações, que eram basicamente como escrever os números e como contá-los. Entretanto, a matemática contemporânea vai além disso, buscando não só entender como escrever e calcular um número, como também o que os números representam e como eles funcionam.

Figura 4 - Fundamentação da matemática moderna



Fonte: Gundlach (1992).

1.3 Bases

Houve um momento em que o homem teve acesso à abstração dos números e aprendeu a distinção sutil entre o número cardinal e o número ordinal. Então ele retomou seus antigos instrumentos: pedras, conchas, pauzinhos, bastões entalhados, nós de cordas, dentre outros. No entanto dessa vez passou a enxergar esses instrumentos sob o ângulo de contagem. Com o passar do tempo ele aprendeu a contar conjuntos cada vez mais extensos, mas acabou esbarrando em novas dificuldades. Essas dificuldades eram evidentemente para representar números maiores, já que não podia multiplicar indefinidamente pedras, pauzinhos entalhes, ou nós de cordas. O número de dedos e partes do corpo também não são tão extensos de acordo com nossa vontade. Então o ser humano se deparou com um problema difícil de ser resolvido, que era como expressar números grandes com a menor quantidade de símbolo possível. Foi a partir daí que surgiu gradativamente como solução a ideia de agrupar quantidades iguais, dando origem aos primeiros sistemas de bases numéricas (IFRAH, 1981).

No geral nem todas as civilizações utilizavam a mesma base, tendo em vista que cada uma delas desenvolveu a base que mais se adequava às suas necessidades e práticas culturais. No entanto, a base mais difundida e utilizada é a base dez, isso se deve ao fato de desde o início da enumeração os homens daquela época utilizarem partes do próprio corpo para enumerar objetos, o que nos mostra que a escolha dessa base para eles foi algo conveniente, pois desde cedo sempre relacionaram a contagem com a quantidade de dedos que possuíam (IFRAH, 1981).

Os diferentes povos ao longo da história usavam bases diferentes, por exemplo, os babilônicos usavam a base sessenta, os hindus a base dez, os maias a base vinte entre outros povos que usaram outras bases. Mas afinal, o que é uma base?

Definição formal de base: seja $b \geq 2$ um inteiro. Todo inteiro positivo a pode ser escrito de modo único na forma

$$a = r_n\, b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0,$$

em que $n \geq 0, r_n \neq 0$ e, para cada índice i, $0 \leq i \leq n$, tem se $0 \leq r_i < b$. Chamamos este inteiro b de base.

Por exemplo:

$$302_7 = 3 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 2 = 149_{10}$$

O sistema posicional de base 2, conhecido como diádico, é o que possui a menor base possível, os únicos dígitos que ele possui são o 0 e o 1. Todavia, a desvantagem de se utilizar essa base é que são necessárias expressões muito longas para representar números pequenos (COURANT; ROBBINS, 2000).

Por exemplo, se formos expressar o número 427 na base 2, fica da seguinte forma:

$$427_{10} = 110101011_2$$

$$110101011_2 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1$$

O sistema de numeração com base cinco, mais conhecido como sistema quinário, foi utilizado de forma ampla pelas civilizações antigas. Segundo Eves (2011) “até hoje algumas tribos da América do Sul contam com as mãos: “um, dois, três, quatro, mão, mão e um” e assim por diante”. O sistema de base vinte também foi bastante utilizado pelos índios americanos, é perceptível que esse sistema também foi conveniente para o povo da época, uma vez que, está diretamente relacionado a soma dos dedos dos pés e das mãos. Os groenlandeses, por exemplo, para representar o número vinte utilizavam a ideia de um homem, se for quarenta dois homens e assim sucessivamente.

1.4 Sistema de numeração

Um sistema de número trata dos diferentes conjuntos numéricos que são organizados pela matemática. Entre estes conjuntos, temos os naturais, inteiros, racionais e reais. Já um sistema de numeração nada mais é do que formas de escrever números, podendo ser posicional ou não. De acordo com Gundlach (1992), "a numeração não posicional, que antecedeu em muito a numeração posicional na maioria das regiões civilizadas do mundo antigo, é puramente aditiva". O exemplo claro disso são os hieróglifos egípcios, nos quais se utilizavam de símbolos para representar cada número, enquanto que para expressar números grandes, bastava apenas somar tais símbolos. Contudo houve outros sistemas de numeração além dos hieróglifos egípcios, mas que em partes se assemelhavam muito a eles, como o sistema de numeração não posicional grego.

> Por exemplo, no sistema de numeração não posicional do período grego clássico (c. 600-300 a.C.) usava-se um sistema alfabético ordinal. O princípio desse sistema foi, muito provavelmente, transmitido à Grécia pelos fenícios, um povo de navegadores e comerciantes. Nesse sistema, cada letra do alfabeto desempenha um papel duplo: serve como numeral e como uma letra. Em alguns sistemas de numeração desse tipo, como hebreu, nenhum símbolo especial era usado para indicar se uma composição de letras denotava um nome ou um número [...] (GUNDLACH, 1992, p. 11).

A Figura 5 irá ilustrar como esse sistema de numeração funcionava.

Figura 5 - Sistema de numeração grego

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Fonte: Gundlach (1992) (adaptada).

É possível notar que, se formos representar o número 328, por exemplo, vamos poder representá-lo de seis maneiras diferentes, fazendo permutações[5], já que, se mudarmos as letras de posições não irá alterar em nada no resultado. Sendo assim, as representações de 328 no sistema de numeração grego são:

$$328 = \tau\kappa\eta = \tau\eta\kappa = \kappa\eta\tau = \kappa\tau\eta = \eta\kappa\tau = \eta\tau\kappa$$

No entanto, se fosse em um sistema de numeração posicional, não iria ter uma boa funcionalidade, uma vez que, se mudarmos os algarismos de posições novos números serão formados. Veja, 328 é um número diferente de 382. Por exemplo, no número 328 o três representa a centena, o dois a dezena e o oito a unidade. Já no número 382 o três continua representando a centena, porém, o oito passa a representar a dezena e o dois a unidade. Assim sendo, houve um momento em que o sistema de numeração não posicional apresentou limitações na hora de representar números grandes, realizar cálculos e principalmente pela ausência de um símbolo para representar o zero. Daí surgiu a necessidade um novo sistema de numeração, o posicional.

Em um sistema de numeração posicional, o uso de um símbolo para representar o zero é indispensável. Sem ele, ocorre ambiguidade na representação de números que possuem posições vazias. Por exemplo, sem o zero, não seria possível diferenciar adequadamente números como 54 e 504, já que ambos poderiam ser interpretados de maneira igual. Esse foi um grande problema enfrentado pelo povo sumério[6], que foi a primeira civilização estabelecida no sul da Mesopotâmia, que usava um sistema de numeração posicional na qual a base era sessenta, enquanto que para indicar o valor do zero deixava um lugar vazio. Todavia esse método tinha que ser examinado com muito cuidado para que os números não fossem confundidos (GUNDLACH, 1992).

> Ainda que, os gregos dos séculos VI, V e IV antes de Cristo tenham sido os principais contribuintes do estudo das propriedades de números, eles nunca reconheceram o zero como número. Para eles os conjuntos dos números inteiros começavam com o um, ao qual seu saber numérico assinalava atributos como "masculino", "razão" e "o divino princípio". (GUNDLACH, 1992, p. 12-13)

A ausência de um símbolo para representar o zero perdurou por muito tempo, mesmo

[5] O número de modos de ordenar n objetos distintos em fila (permutações simples n objetos) é igual $P_n = n(n-1) \dots 1 = n!$.

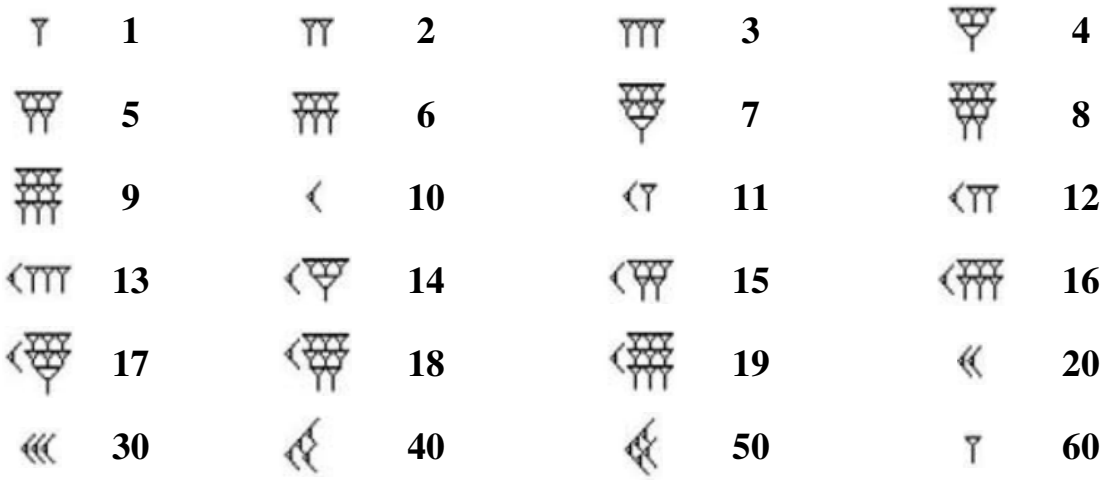
[6] A mais antiga civilização conhecida, estabelecendo-se no sul da Mesopotâmia, atual Iraque.

havendo vários avanços na matemática. Ao que tudo indica o zero só começou a ser reconhecido como número pelos hindus, durante a invenção do sistema de numeração indo-arábico. Falaremos com mais rigor sobre isso na seção sistema de numeração indo-arábico (GUNDLACH, 1992).

1.4.1 Sistema de numeração babilônico

O sistema de numeração babilônico surgiu aproximadamente em 1792-1750 a.C. e foi um dos mais admiráveis da antiguidade. Esse sistema se diferenciava dos demais daquela época, pelo fato de ser posicional. Diferente do sistema indo-arábico, esse sistema era de base sessenta, nele os números de 1 a 59 formavam as unidades simples ou de primeira ordem. Os de sessenta constituíam o de segunda ordem e as potências de sessenta correspondiam às unidades de terceira ordem e assim sucessivamente. Além disso essa numeração se utilizava apenas de dois algarismos, um cravo vertical representava a unidade e a asna que representava o dez, conforme Figura 6. Essa escrita recebia o nome de cuneiforme em virtude do seu aspecto de cunha e cravo (IFRAH, 1981).

Figura 6 - Sistema de numeração babilônico



Fonte: Roque, (2012) (adaptada).

Os números de 1 a 59 eram representados de forma aditiva, ou seja, repetia-se esses dois símbolos quantas vezes fossem necessárias. Assim para escrever o número 25 eram necessários duas asnas e cinco cravos. No sistema babilônico, o valor do algarismo mudava de acordo com a posição em que ele ocupava, o número um por exemplo valia uma unidade simples na primeira

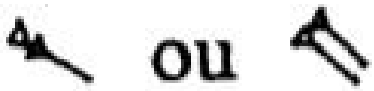
casa, o sessenta na segunda casa e as potências de sessenta nas casas seguintes. Por exemplo para escrever o número 85 era necessário um cravo somado a duas asnas e cinco cravos, não obstante era preciso colocar as duas asnas e os cinco cravos que representavam o 25 na primeira posição e um cravo que representava 60 na segunda (IFRAH, 1981). Assim, a representação de 85 no sistema babilônico é:

85 = 

Entretanto isso gerou várias ambiguidades que posteriormente ocasionaram vários erros, um deles era a confusão na hora de expressar o número dois e o sessenta e um, já que a notação dos dois eram iguais. Diante disso, alguns escribas mesopotâmicos deixavam um espaço vazio para marcar a passagem de uma ordem sexagesimal para a seguinte. Mesmo assim eles ainda possuíam um problema que era a ausência do zero.

Os matemáticos ignoraram o zero por mais de quinze séculos, no entanto as necessidades os fizeram mudar de ideia, tendo em vista que, quando se aplicava o princípio de posição em algum momento era preciso dispor de um símbolo especial para representar as unidades que estavam faltando. O número 3060, é um exemplo, de número que os babilônicos precisavam do zero para expressá-lo. Ao longo do tempo os babilônicos perceberam que só deixar o espaço vazio ainda gerava ambiguidades, por isso era necessário a criação do símbolo para representar o zero(IFRAH, 1981). Finalmente todas essas imprecisões desapareceram no século III a.C. quando criaram tal símbolo, conforme Figura 7.

Figura 7 - Representação do zero



Fonte: Ifrah (1981).

1.4.2 Sistema de numeração romano

O sistema de numeração romano foi instituído em Roma e amplamente utilizado durante o período do Império Romano[7]. Tal sistema é caracterizado por não ser posicional e não ter um símbolo para representar o zero. Essas características, aliadas à dificuldade de realizar cálculos

[7] O Império Romano (27 a.C. - 476 d.C.) foi a fase centralizada da civilização romana, caracterizada por uma forma de governo autocrática liderada por um imperador.

e representar números grandes é o que torna o sistema de numeração romano limitado. Semelhante aos demais sistemas de numerações antigos, o romano era baseado no princípio da adição. Esse sistema possuía sete algarismos independentes uns dos outros: $I = 1$, $V = 5$, $X = 10$, $L = 50$, $C = 100$, $D = 500$ e $M = 1.000$, e possuía regras (IFRAH, 1981).

No sistema em questão o algarismo de menor valor assume funções diferentes de acordo com a posição em que ocupa. Quando está à direita de um algarismo de maior valor, ele é somado; quando está à esquerda é subtraído. Por exemplo, em VI, o I está à direita do V, logo indica uma adição, resultando em seis. Já em IV, o I está à esquerda do V, indicando assim uma subtração, resultando em quatro no sistema indo-arábico (IFRAH, 1981).

Embora muitas pessoas achem que a grafia dos algarismos romanos seja baseada no alfabeto, não foi bem assim que isso se deu, pois esses grafismos não constituem as formas iniciais de algarismos desta numeração. Na Figura 8, está a representação inicial desse sistema: a unidade era representada por um traço vertical, o cinco por um ângulo agudo, o dez por uma cruz, o cinquenta por um ângulo agudo e um traço vertical, o cem por uma cruz cortada por um traço vertical, o quinhentos por um semicírculo e o milhar por um círculo cortado com uma cruz (IFRAH, 1981).

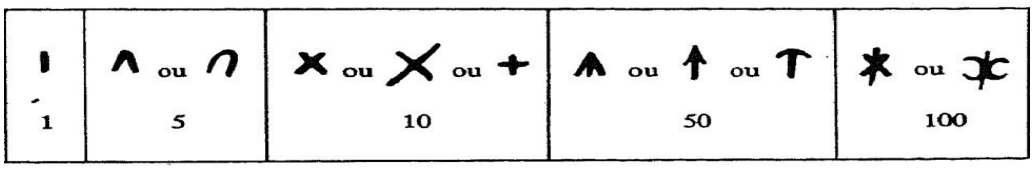
Figura 8 - Grafia dos algarismos romanos arcaicos



Fonte: Ifrah (1981).

Os algarismos romanos, ao contrário do que muitos pensam, originou-se há milhares de anos na Itália pelos etruscos. Esse povo criou signos de numeração de grafia e estruturas iguais às dos algarismos romanos mais arcaicos. Na Figura 9, podemos observar as semelhanças com a Figura 8 (IFRAH, 1981).

Figura 9 - Grafia dos algarismos romanos etrusca



Fonte: Ifrah (1981).

Os etruscos chegaram a aplicar esses algarismos e as regras de soma e subtração em suas inscrições no século IV. Na Figura 10 estão as inscrições etruscas do número 19 e 38:

Figura 10 - Representações etruscas dos números 19 e 38



Fonte: Ifrah (1981).

Diante dos avanços nas atividades comerciais, houve a necessidade de um sistema de numeração que facilitasse a execução de cálculos, fosse posicional e possuísse um símbolo para representar o zero. Dessa forma ao longo do tempo o sistema de numeração romano na Europa e Norte da África foi sendo substituído aos poucos pelo indo-arábico.

1.4.3 Sistema de numeração indo-arábico

O ancestral do nosso sistema de numeração nasceu no norte da Índia, por volta do século V da era cristã. Existem vários documentos que comprovam isso, inclusive os próprios árabes, a quem foi atribuída a descoberta desse sistema de numeração, deixam claro que foram os hindus os pioneiros dessa descoberta. Antes de chegar ao sistema de numeração como o temos hoje, ele passou por uma longa construção e aperfeiçoamento. Inicialmente os hindus usaram por um longo período uma numeração escrita e muito rudimentar, como é possível ver na Figura 11. O sistema não era posicional, pois existiam símbolos para representar cada ordem. Assim sendo, além deles possuírem algarismos particulares para cada unidade simples, possuíam também para cada dezena, cada centena, cada milhar e cada dezena de milhar (IFRAH, 1981).

Figura 11 - Numeração escrita e rudimentar hindu



Fonte: Ifrah (1981).

Como forma de contornar essa situação eles passaram a exprimir esses números maiores por extenso. Esse caminho foi o que os levou à descoberta do princípio posicional e do zero. Essa linguagem era oral. Inicialmente era atribuído um nome particular para cada número do um ao nove e cada dezena e potência de dezena eram dados nomes particulares, conforme Figura 12.

Figura 12 - Numeração hindu por extenso

Eka	*dvi*	*tri*	*Catur*	*Pañca*	*sat*	*sapta*	*Asta*	*nava*	*dasa*	*sata*	*Sahasra*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1.000

Fonte: Ifrah (1981) (adaptada).

Os hindus costumavam exprimir os números por extenso, iniciando pelas unidades simples. Por exemplo, expressamos o número 3709 como três mil setecentos e nove. Já eles exprimiam como nove, setecentos e três mil, que na linguagem deles era enunciada assim: *nava sapta sata ca trisahasra* (IFRAH, 1981).

No século V, houve um grande avanço na escrita dos números por extenso nesse sistema. Os hindus passaram a não escrever mais os nomes dados para cada dezena e suas respectivas potências. Então o número 7629 passou a ser escrito como nove dois seis sete. Então ao dizer "DOIS, TRÊS", estava se atribuindo o valor de $2\times1 + 3\times10$. Entretanto foi nesse momento que eles se depararam com um entrave, pois o número 502 era representado por "DOIS, CINCO", no entanto o 52 também, o que gerava uma confusão na hora de diferenciá-los já que não existia uma palavra para representar o zero.

Para contornar essa situação, os hindus recorreram à palavra *sunya,* que significava vazio. Logo, 502 passou a ser enunciado como: DOIS, VAZIO, CINCO. Assim os hindus conseguiram todos os elementos para a construção do nosso atual sistema de numeração. Com isso, o sistema de numeração indo-arábico foi consolidado e a partir do século VI se expandiu além das fronteiras da Índia. Posteriormente foi amplamente utilizado pelas civilizações khmer (Camboja), cham (sudoeste do Vietnã), javanesa e entre outras, principalmente para expressar datas. Não se sabe ao certo como e quando os novos símbolos numerais chegaram á Europa, mas provavelmente foram disseminados por meio de comerciantes e viajantes da costa do Mediterrâneo (EVES, 2011).

Foi através de uma tradução latina do tratado de Al-khowârizmî, em que ocorreu no século XII, que fez com que esse sistema fosse reconhecido em toda Europa (EVES, 2011). Na Figura 13 é possível ver as mudanças nos símbolos ao longo do tempo até chegar ao que temos

hoje. No entanto é importante salientar que essa situação foi gradual e carregada de preconceitos.

Figura 13 - Mudanças na grafia do sistema indo-arábico



Fonte: https://umalunodepedagogia.blogspot.com/2018/09/a-origem-da-matematica.html.

Como fica evidente na figura esse sistema possui dez algarismos por ser de base dez, sendo eles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. São através desses números que todos os outros são expressos.

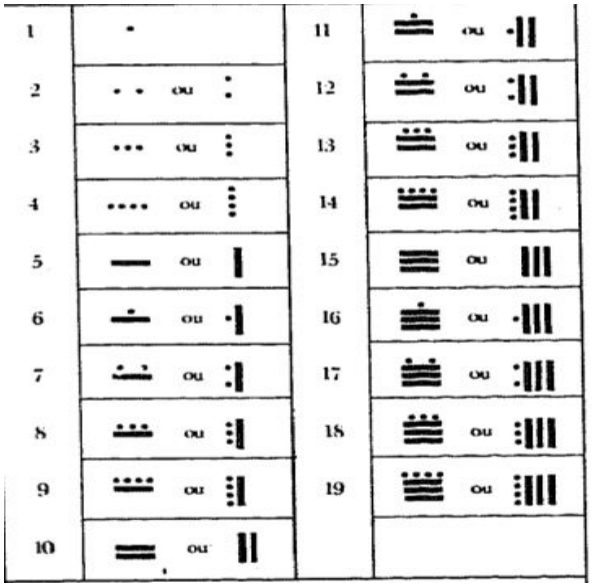
1.4.4 Sistema de numeração maia

O sistema de numeração maia se desenvolveu na América Central, mais precisamente na região da Mesoamérica. Através dos manuscritos maias, principalmente do *Codex de Dresden*, que era um tratado de astronomia e de adivinhação copiado no século IX, ficou revelada a existência, entre os sacerdotes maias, de um sistema de base vinte munido de um zero, no qual o valor dos algarismos era determinado pela posição ocupada na escrita dos números (IFRAH, 1981).

> Os números de 1 a 19 eram representados aditivamente pelo uso de combinações de pontos e barras simbolizando 1 e 5, sendo o 19 representado por quatro pontos (1) e três barras (5). No 20 começava a numeração posicional, os numerais sendo lidos verticalmente, de cima para baixo. O 20 era representado por um ponto sobre o símbolo do zero (GUNDLACH, 1944, p. 29).

Esse sistema possuía apenas três símbolos e através desses os demais números eram criados: o ponto representava o número 1, a barra ou vareta o 5 e o símbolo da concha o zero. Na Figura 14, temos a representação dos números de 1 a 19 no sistema de numeração maia.

Figura 14 - Grafia no sistema de numeração maia



Fonte: Ifrah (1981).

Os números maiores que 20 eram escritos em uma coluna vertical, onde possuíam uma fileira para cada ordem de unidades. Já para os números que eram compostos de duas ordens, colocava-se o algarismo das unidades simples na parte de baixo e o das vintenas na parte de cima.

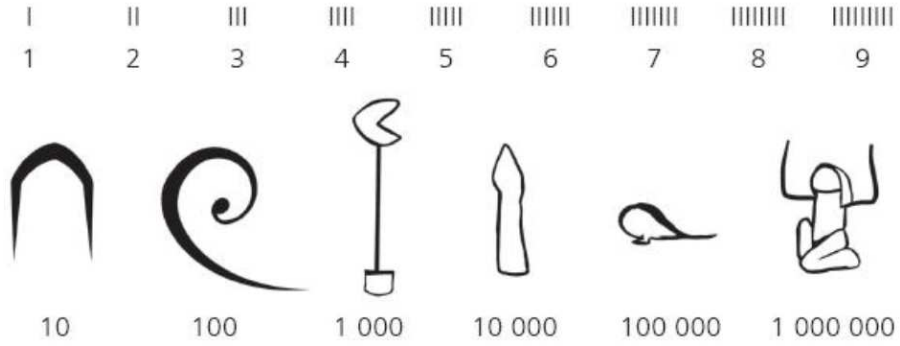
1.4.5 Sistema de numeração egípcio

O sistema de numeração egípcio se originou por volta do ano 3000 a.C. Os hieroglifos egípcios são todos tirados da natureza, principalmente da fauna e da flora do rio Nilo. Os pictogramas e os desenhos variam de um sistema para outro desde a época arcaica, ou seja, nem sempre os signos que deveriam representar a mesma coisa eram de fato iguais (IFRAH, 1981).

Os egípcios costumavam fazer seus algarismos gravando-os ou esculpindo-os em monumentos de pedras, traçando-os em lascas de rocha ou até mesmo em folhas de papiro. A civilização egípcia era bem desenvolvida além de ser urbanizada e estar em expansão. Por essas razões houve a necessidade do rompimento de sua cultura exclusivamente oral vigente até então, para a utilização de um sistema de numeração escrito.

O sistema de numeração egípcio possui um hieroglifo para unidade, outro para o dez e cada uma das suas respectivas potências. O algarismo que representa a unidade é um traço vertical, o da dezena se assemelha muito com um U maiúsculo invertido ou ferradura, a centena por um pergaminho, o milhar por uma flor de lótus, a dezena de milhar por um dedo inclinado, a centena de milhar por um barbato e o milhão por um homem ajoelhado erguendo os braços para o céu. A Figura 15 ilustra como funcionava esse sistema (EVES, 2011).

Figura 15 - Hieróglifos egípcios



Fonte: Eves (2011)

Nesse sistema, para expressar um número basta apenas ir somando os símbolos que os representam. Abaixo teremos um esquema mostrando como é representado o número 1325, nesse sistema:

$$1325 = 1(10^3) + 3(10^2) + 2(10) + 5(1) =$$ 

Perceba que esse sistema não é posicional, pois os valores dos símbolos não são alterados, ainda que mude suas posições.

1.5 Números naturais

Não é possível determinar, com precisão, o exato momento em que os números naturais surgiram, no entanto é perceptível que estes foram sendo aperfeiçoados ao longo do tempo. Tendo em vista que, se formos comparar os conhecimentos dos povos primitivos em relação com os da atualidade sobre os números naturais, há uma grande diferença em questão de domínio.

Em um estudo de alguns povos da África e Austrália, foi possível compreender um pouco mais como os povos primitivos viviam, uma vez que esses povos estudados apresentaram

um certo atraso no desenvolvimento dos números naturais. Segundo Caraça (1951) os principais resultados observados nesse estudo foram: a ideia de número natural não é o produto puro do pensamento, independentemente das experiências; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem, pelo contrário, os números foram se formando lentamente pela prática diária de contagens. Segundo resultado observado: esta afirmação é comprovada pelo que se passa ainda hoje em alguns povos.

Há algumas tribos da América Central que não conhecem números além do cinco ou seis, no entanto há outras que vão até 10.000. Um ponto essencial é que o nível de conhecimento dos números é influenciado pelas condições da vida econômica de cada povo. Quanto mais intenso for o convívio social e mais frequentes forem as trocas comerciais, tanto dentro quanto fora do grupo, maior tende a ser o domínio dos números. Em suma, na fala do autor é possível entender que, quanto mais os povos comercializavam, mais os números naturais iam se desenvolvendo, visto que tal desenvolvimento é consequência de uma sociedade em que as atividades comerciais se encontravam em constante crescimento.

Como já mencionado nesse trabalho, a contagem nasceu das necessidades da humanidade em lidar com atividades do cotidiano. E a ideia de número natural sempre esteve associada a ideia de quantidade. No entanto há uma outra opção de formalização que é axiomática e não construtiva.

> Ela consiste simplesmente em assumir a existência do conjunto dos números naturais (a partir do qual construiremos os demais conjuntos numéricos). Mas o que significa assumir a existência do conjunto dos números naturais? Significa assumir a existência de um conjunto satisfazendo certos axiomas que são capazes de caracterizar completamente, de forma rigorosa, a nossa ideia intuitiva de conjunto dos números naturais. Caracterizar completamente significa que um conjunto obedecendo tais axiomas é uma cópia daquilo que já conhecemos intuitivamente como o conjunto dos números naturais (FERREIRA, 2011, p. 5).

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é caracterizado pelos Axiomas de Peano. Segundo Ferreira (2011), "os Axiomas de Peano são uma apresentação matematicamente rigorosa dessas ideias intuitivas, e se apoiam em conceitos matemáticos que já conhecemos ou admitimos conhecidos, no caso, o de conjunto e de função".

1. Existe uma função injetiva $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n.
2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$.

Segundo Lima (2009) essas propriedades acima são chamadas de Axiomas de Peano. Esses axiomas podem ser reformulados assim:

1. Todo número natural possui um sucessor, que também será um número natural; números diferentes possuem sucessores diferentes.
2. Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro número.
3. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto possui todos os números naturais.

1.5.1 Operações aritméticas com os números naturais

A aritmética é o campo da matemática que está diretamente ligado aos estudos dos números inteiros, tendo seu enfoque principal na compreensão das quatro operações: a soma, subtração, multiplicação e divisão. Nesse trabalho vamos abordar somente as operações de soma e multiplicação de números naturais (CARAÇA, 1951).

Para Courant e Robbins (2000) "a teoria matemática dos números naturais ou inteiros positivos é conhecida como Aritmética. Baseia-se no fato de que a adição e a multiplicação de inteiros obedecem a certas leis".

Propriedades da adição:

Em uma adição de dois números naturais, a ordem das parcelas não altera o total. Essa propriedade é chamada de propriedade comutativa da adição. Sendo a e b números naturais quaisquer, temos:

$$a + b = b + a.$$

Em uma adição de um número natural com zero, a soma é sempre igual a esse número natural. Assim, com essas condições o zero é chamado de elemento neutro da adição. Sendo a é um número natural qualquer, temos:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Em uma adição de três ou mais números naturais quaisquer, podemos fazer uma associação das parcelas de modos diferentes. Essa propriedade é chamada de propriedade associativa da adição. Sendo a, b e c números naturais quaisquer, temos:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Propriedades da multiplicação:

Em uma multiplicação de dois números naturais quaisquer, a ordem dos fatores não altera o resultado produto. Essa propriedade é chamada de comutativa da multiplicação. Sendo a e b números naturais quaisquer, temos:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Em uma multiplicação de três números naturais quaisquer, podemos associar os fatores de maneiras diferentes. Essa propriedade é chamada de propriedade associativa da multiplicação. Sendo a, b e c números naturais quaisquer, temos:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Em uma multiplicação de um número natural qualquer por 1, o produto sempre será igual a esse número natural. Nessas condições o número 1 é chamado elemento neutro da multiplicação. Sendo a é um número natural qualquer, temos:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Para multiplicar um número natural por uma adição de duas parcelas, multiplicamos o número pelas parcelas e, a seguir, adicionamos os resultados obtidos. Essa propriedade é chamada de propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Logo se a, b e c são números naturais quaisquer, temos:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

1.6 Números inteiros

Há algumas grandezas que podem ser tomadas em sentidos opostos. O nosso calendário, por exemplo, é marcado por um acontecimento marcante, que é o nascimento de Cristo. Assim sendo, tal acontecimento marca a contagem da linha do tempo para frente e para trás. Então é muito comum quando nós vamos recorrer a livros, mostrar por exemplo, que Sócrates morreu

em 399 a.C., e Galileu nasceu em 1564 d.C. Esses acontecimentos são separados por um total de 1963 anos; a diferença entre eles está no fato de um ter ocorrido 399 anos antes e o outro ter ocorrido 1564 anos depois do nascimento de Cristo.

Nessa linha do tempo o nascimento de Cristo é a origem. Imagine isso em uma reta, então há acontecimentos que ocorreram antes da origem (à esquerda) e outros após a origem (à direita), ou seja, dois sentidos distintos opostos. Analogamente, quando consideramos o movimento de um ponto, saindo de uma certa posição inicial e realizando-se ao longo de uma trajetória retilínea, precisamos, para indicar a posição do ponto em um determinado instante, saber, entre outras coisas, em quais dos dois sentidos opostos, sobre a reta, o movimento se realiza (CARAÇA, 1951).

Em suma, houve um momento em que só os números naturais não foram suficientes para suprir as demandas do povo da época. Por exemplo, com aumento das transações comerciais houve momentos em que os mercadores tiveram que lidar com dívidas e saldos negativos, além de trajetória e deslocamento em sentidos opostos, que não podiam ser compreendidas e representadas apenas através dos números naturais, surgindo a necessidade da sistematização de um novo conjunto numérico, conhecido antigamente como números relativos e na atualidade como conjunto dos números inteiros (CARAÇA, 1951).

De acordo com Caraça (1951), sejam a e b dois números reais quaisquer. À diferença $(a - b)$ chamaremos número inteiro, que será denominado positivo, nulo ou negativo, conforme $(a > b)$, $(a = b)$, $(a < b)$. Tomemos os números 6 e 7. Ao efetuarmos a operação $(7 - 6)$ obtém-se o resultado 1. Nesse caso verifica-se que $(a > b)$, visto que $(7 > 6)$, portanto, a diferença $(a - b)$ resulta em um número positivo. Em contrapartida, ao efetuar a operação, $(6 - 7)$ oobtém-se (-1). Dessa forma, caímos no caso em que $(a < b)$, visto que, $(6 < 7)$ e a diferença $(a - b)$ resulta em um número inteiro negativo.

2 CÁLCULO MENTAL

Neste capítulo, será apresentado o referencial teórico que fundamenta a discussão acerca do que é o cálculo mental. Inicialmente, será abordado o conceito de cálculo mental, buscando compreender suas características e particularidades enquanto habilidade matemática. Em seguida, serão discutidas as competências relacionadas ao cálculo mental, considerando os conhecimentos e procedimentos mobilizados durante a realização de cálculo mental bem como sua abordagem na perspectiva da BNCC, e algumas estratégias utilizadas para o seu desenvolvi mento.

Quando se fala na definição de cálculo mental, há uma infinidade de concepções, que por vezes despertam discrepâncias entre autores. Parra (1996) *apud* Conti e Nunes (2019) afirma que a expressão "cálculo mental" pode apresentar diferentes significados, dividindo as opiniões dos pesquisadores e ocasionando dúvidas.

De acordo com o Dicionário Enciclopédico Luso-Brasileiro VI (1991) *apud* Carvalho (2011), o cálculo mental é como uma operação aritmética, feita de memória, sem auxílio de sinais escritos (p. 428). Em contrapartida para Taton (1969) *apud* Carvalho (2011), o cálculo mental e escrito é semelhante, uma vez que ambos usam do mesmo encadeamento de operações mentais elementares. Para além de Taton, existem outros autores que acordam da mesma ideia quando o assunto é cálculo mental. Por exemplo Buys (2001) e Bourdenet (2007)*, apud* Carvalho (2011), defendem que o cálculo mental não se deve restringir ao operar "de cabeça", mas que a utilização de papel e lápis para cálculos intermediários pode ser útil.

O que se percebe na fala desses autores é que o cálculo feito usando apenas a cabeça não se difere totalmente do cálculo em que há o auxílio de lápis e papel, haja a vista que ambos contam com o cálculo mental na sua resolução. Dessa forma, o lápis e o papel são vistos pelos mesmos como um recurso facilitador na hora das resoluções, todavia o que muda é o fato de o cálculo escrito utilizar algoritmos nas resoluções. Parra (1996) *apud* Conti e Nunes (2019) ainda afirma que essas duas vertentes do cálculo mental se relacionam, de forma que o cálculo pensado deve acompanhar um aumento progressivo do cálculo automático.

Desde os primórdios da nossa civilização até os dias atuais ocorreram grandes avanços, que abrangeram todas as áreas da sociedade e com a matemática não foi diferente; Por exemplo, desde a criação da Pascalina (Figura 16), desenvolvida pelo matemático francês Blaise Pascal em 1642, capaz de realizar operações de adição e subtração, até seu posterior aperfeiçoamento por Gottfried Leibniz, que possibilitou também a realização de multiplicações e divisões,

observa-se um marco significativo para o desenvolvimento da matemática e das tecnologias de cálculo.

. Depois de um longo período, Charles Babbage no século XIX criou uma máquina com objetivo de resolver equações polinomiais, ela ainda era capaz de receber dados e armazená-los. Com isso, Babbage ficou reconhecido por alguns como pai do computador (OLIVEIRA, 2011).

Figura 16 - Calculadora Pascalina, criada pelo matemático francês Blaise Pascal



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/biografia/blaise-pascal.htm.

No século XX foram criadas as primeiras calculadoras de bolso e mesa que trouxeram consigo uma contribuição gigantesca na matemática, facilitando a agilidade de cálculos que antes eram feitos à mão. Moon (2007) *apud* Oliveira (2011) cita que em 1967, Jack Clair Kirby utilizou um circuito integrado e criou o que seria a primeira calculadora portátil, que podia somar, subtrair, multiplicar e dividir. Além disso contava com algumas casas decimais e era possível digitar números com até 12 algarismos. Usava uma bateria de prata-zinco e imprimia o resultado num rolinho de papel.

No entanto no mundo globalizado em que vivemos tudo tem seus prós e contras, e com a calculadora não foi diferente, pois houve o acomodamento por parte das pessoas em não querer sair de sua zona de conforto para por exemplo, realizar cálculos mentais como indica Bourdenet (2007) *apud* Carvalho (2011), com o uso crescente da calculadora, perdeu-se o hábito de calcular mentalmente, remetendo para segundo plano a aprendizagem de competências básicas de cálculo. Por isso, de forma a desenvolver nos alunos o sentido crítico e flexibilidade nas operações com números, é preciso pensar numa aritmética que junte em harmonia o cálculo mental e o uso da calculadora Ralston, (1999) *apud* Carvalho (2019).

2.1 Modalidades de cálculo

Ao falar sobre cálculo, o que vem de imediato na mente da maioria das pessoas é aquele cálculo realizado apenas utilizando a cabeça, entretanto, não é bem assim. O cálculo possui quatro modalidades: o cálculo mental, o cálculo escrito, a calculadora e a estimativa. O cálculo mental, como já mencionado nesse trabalho, é aquele cálculo realizado de cabeça podendo ou não fazer uso de papel e lápis na hora da resolução. O cálculo escrito como o nome já diz, é o cálculo que utiliza lápis, papel e algoritmos, a exemplo daquelas contas de adição, subtração, multiplicação e divisão que armamos no papel para ter uma resposta mais assertiva. O cálculo feito usando calculadora é um cálculo automático em que é necessário apenas que a pessoa saiba manusear a calculadora para garantir uma exatidão. Por exemplo, saber calcular mentalmente ajuda nesse processo de utilizar a calculadora corretamente. Já a estimativa é aquele cálculo em que para ter uma resolução mais rápida faz-se o arredondamento dos números: por exemplo, ao calcular $410 + 520$ faz-se uma aproximação para $400 + 500 = 900$ pois, como o próprio nome sugere o objetivo é de estimar um valor (CONTI e NUNES, 2019).

Bigode e Gimenez (2010) *apud* Conti e Nunes (2019), frisam que, para o desenvolvimento de competências de cálculo, é importante que haja um equilíbrio entre as quatro modalidades de cálculo: cálculo escrito, cálculo mental, estimativa e calculadora. Essas quatro modalidades são consideradas como os pilares do cálculo, por isso os autores mencionados acima fazem uma analogia com uma mesa de quatro pés. Em uma mesa de quatro pés se algum destes for maior que o outro, a mesa cambaleará, ou seja, não estará em equilíbrio, o que só seria possível se os pés fossem todos iguais. Isto é, se cada pé da mesa representa um dos pilares do cálculo, então eles devem ser valorizados e incentivados da mesma forma, para que ocorra um equilíbrio entre essas quatro competências. Em linhas gerais essas modalidades não devem ser trabalhadas de maneira isolada ou hierarquizada, pois são interdependentes e se complementam no processo de aprendizagem.

Guimarães e Freitas (2007) *apud* Conti e Nunes (2019), consideram que nas escolas brasileiras predomina o uso do cálculo escrito exato. No entanto para que as outras três competências sejam bem desenvolvidas é necessário que o cálculo mental seja bem trabalhado em sala inicialmente, tal qual como citado por Gomes (2007) *apud* Conti e Nunes (2019), os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos finais do ensino fundamental ressaltam a relação entre os diferentes tipos de cálculo, uma vez que o cálculo mental, a

estimativa e as aproximações servem de apoio para o cálculo escrito. Para além dos autores a BNCC acorda dessa mesma ideia; no tocante aos cálculos para resolver os problemas propostos, espera-se que os estudantes tenham desenvolvido diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental.

2.2 Importância do ensino do cálculo mental sob a perspectiva da BNCC

Segundo Gomes (2007) *apud* Conti e Nunes (2019), na matemática escolar, a prática com o cálculo mental já foi incentivada no passado, no período anterior ao movimento da Matemática Moderna que ocorreu durante a Guerra Fria, entre as décadas 1950 e 1970, sendo justificada pela sua utilidade. Contudo depois desse período o cálculo mental perdeu a sua visibilidade, mas atualmente essa habilidade vem sendo revalorizada com o intuito de retomar a autenticidade dos alunos.

Entretanto o cálculo mental ainda não recebeu o reconhecimento que merece. Ao fazer uma análise do documento BNCC, percebe-se que ele é valorizado somente nos anos iniciais do ensino fundamental, fazendo com que essa referência seja menos frequente no ensino fundamental anos finais e no ensino médio.

No ensino fundamental anos iniciais, por exemplo a BNCC cita que é necessário acrescentar à realização dos algoritmos e das operações, além da habilidade de efetuar cálculos mentalmente, fazer estimativas, usar calculadora e, decidir quando é apropriado usar outro procedimento de cálculo. Em suma, o cálculo mental é tratado como uma estratégia transversal que fundamenta a aprendizagem matemática ao longo da educação básica com ênfase nos anos iniciais do ensino fundamental. Essa habilidade é vista como uma estratégia que favorece o raciocínio matemático, no entanto ela não é única, cabe ao estudante decidir quando é apropriado usá-la ou não.

Há algumas habilidades que reforçam a questão do cálculo mental ser incentivado no ensino fundamental anos iniciais, entre elas temos: (EF02MA05) Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito, (EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito, (EF03MA05) Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito, inclusive os convencionais, para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração com números naturais, (EF03MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo cálculo mental.

Em contrapartida aos anos iniciais, há apenas duas habilidades previstas pela BNCC para os anos finais, são elas: (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros e (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

Em relação às competências específicas, a BNCC não as apresenta destinadas ao desenvolvimento do cálculo mental de forma explícita, no entanto, há algumas dessas competências implícitas, que estão subjacentes a competências que enfatizam o raciocínio lógico e resolução de problemas.

Contudo, se percebe que com a passagem dos anos iniciais do ensino fundamental para os anos finais, o cálculo mental vai deixando gradativamente de ser mencionado explicitamente e estimulado pela BNCC. No ensino médio a situação ainda é mais precária pois há uma maior valorização de conteúdos algébricos, modelagem e estudo de funções em detrimento do cálculo mental.

Segundo Conti e Nunes (2019), no ensino médio o fato de não haver uma valorização do ensino do cálculo mental em sala de aula ocorre devido ao grande volume de conteúdos previstos por essa etapa ou por ser considerado um conteúdo já abordado e aprendido pelos estudantes. Além disso, nessa etapa escolar os alunos estão sendo preparados para realizar o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), então a maior preocupação dos professores é passar o máximo de conteúdo que conseguirem e acabam optando por priorizar o cálculo escrito, o que é um grande erro, haja vista que como a prova é longa e exaustiva, então utilizar o cálculo mental ajudaria muito a otimizar o tempo e amenizar o cansaço que o estudante passa.

Bourdenet (2007) cita que os alunos que chegaram no ensino médio estão menos familiarizados com os números, as tabelas de multiplicação, as operações mentais com números, eles têm muito menos experiência do que esses mesmos alunos há 10 anos; onde antes se colocava o cálculo mental agora é a calculadora que assume. Segundo Bourdenet (2007) ainda as calculadoras já estão sendo introduzidas no 4° ano do ensino fundamental, o que faz com que os alunos percam a vontade de calcular mentalmente, já que com a calculadora eles não precisam pensar muito e assim essas crianças seguem cada vez mais sem dominar o cálculo mental.

Muito se fala nas consequências de deixar o cálculo mental de lado em detrimento da calculadora, mas pouco se fala da importância de se ensinar o cálculo mental. Bourdenet (2007)

sugere que boas habilidades em cálculo mental são indispensáveis para prever uma ordem de grandeza de um resultado, para permitir uma utilização razoável da calculadora para tornar o aluno crítico a um resultado exibido na calculadora. O que se percebe na fala do autor é que até para fazer o cálculo utilizando calculadora é preciso saber pelo menos um pouco de cálculo mental. Se o aluno usar a calculadora para calcular algo e perceber que o resultado obtido está longe da sua realidade, irá perceber que pode ter errado em alguma etapa no processo do uso da calculadora.

No ensino fundamental, por exemplo, se o aluno tiver que calcular 9×9 na calculadora e não souber o resultado de cabeça, mas souber calcular 10×10 ele vai saber identificar que a conta está errada, por exemplo, se o resultado obtido na calculadora ultrapassar 100. Ainda segundo o autor Bourdenet (2007), a prática regular do cálculo mental permite uma manutenção regular dos conhecimentos, uma distribuição ao longo dos anos de certos aprendizados é um meio importante para assentar uma retomada ampliada dos conteúdos, ou seja, cada noção pode ser regularmente revestida. É perceptível na fala desse autor que ensinar o cálculo mental desde o início dos anos iniciais na escola ajuda o aluno a nunca esquecer o que já foi aprendido e manter esse saber sempre em mente.

2.3 Estratégias de cálculo mental com números naturais

Ribeiro (2009) *apud* Carvalho (2011) cita que as estratégias de cálculo mental quando conhecidas, compreendidas e aplicadas, permitem a realização eficaz e rápida de cálculo mental. Esse autor discute que apesar de existir inúmeras estratégias para se calcular mentalmente, há algumas que merecem uma atenção maior, entre elas temos:

2.3.1 Decomposição de números

Essa é uma estratégia que pode ser utilizada para resolver cálculos das quatro operações. Primeiramente, os números que serão utilizados na operação serão decompostos pelo critério de ordem que cada algarismo ocupa (unidade, dezena, centena, e assim sucessivamente), e em seguida será efetuada, entre os algarismos de cada ordem, a operação correspondente.

Ao efetuar a adição, por exemplo, $453 + 312$, será realizada a decomposição por ordem de cada um dos números, resultando em $453 = 400 + 50 + 3$ e $312 = 300 + 10 + 2$. Após, cada ordem correspondente ser adicionada, ou seja, centena com centena, dezena com dezena

e unidade com unidade e por fim realizar a adição da soma de cada ordem resultará no total. Para ficar mais claro, iremos apresentar a operação estruturada:

$$\begin{aligned} 453 &= 400 + 50 + 3 \\ +\ 312 &= 300 + 10 + 2 \\ \hline & 700 + 60 + 5 \ = 765 \end{aligned}$$

A subtração é análoga à adição, sendo que a única coisa que muda é que se subtrai as ordens correspondentes. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 575 &= 500 + 70 + 5 \\ -\ 465 &= 400 + 60 + 5 \\ \hline & 100 + 10 + 0 \ = 110 \end{aligned}$$

A multiplicação também é similar às operações de soma e subtração. O número é decomposto em ordens multiplicando separadamente cada ordem. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 135 &= \quad 100 + 30 + 5 \\ \times 6 &= \qquad\qquad \times 6 \\ \hline & 600 + 180 + 30 \ = 810 \end{aligned}$$

A divisão é análoga à multiplicação, onde primeiro se separa o dividendo em ordens e depois efetua a divisão de cada ordem pelo divisor. Exemplo:

$$\begin{aligned} 936 &= 900 + 30 + 6 \\ \div 3 &= \qquad\quad \div 3 \\ \hline & 300 + 10 + 2 \ = 312 \end{aligned}$$

2.3.2 Compensação

A compensação é uma estratégia de cálculo mental baseada na alteração de um dos termos da operação, substituindo-o por um outro número que facilite a resolução dos cálculos. E no final, como o próprio nome sugere, há uma compensação com relação ao termo que foi modificado.

Ao efetuar uma operação de adição, considere o seguinte exemplo: $29 + 22$. Nesse caso, leva-se em consideração que o número 29 fica muito próximo de 30, então adiciona-se uma unidade a ele, tornando o processo de resolução mais fácil. Logo a nova adição será: $30 + 22$. No entanto, como o próprio nome sugere, essa modificação altera o resultado da adição, então esse valor deve ser corrigido mediante uma compensação. Assim,

$$29 + 22 = (29 + 1) + 22 - 1 = (30 + 22) - 1 = 52 - 1 = 51.$$

Para a subtração, considere a operação: $400 - 98$. Veja que é mais fácil subtrair 100 do que 98 de 400. Então, adiciona-se 2 a 98 e transforma-se 98 em 100. Depois subtrai-se 100 de 400, que dará 300. Em seguida, adiciona-se dois a 300 e resultará na resposta final 302, ou seja,

$$400 - 98 = 400 - (98 + 2) + 2 = 400 - 100 + 2 = 300 + 2 = 302.$$

Na multiplicação 6×19 é mais fácil calcular mentalmente 6×20, então nesse caso para facilitar o cálculo, adiciona-se 1 a 19 e transforma-se em 20. Isto resultará em: $6 \times 20 = 120$. Perceba que foi adicionado 6×1 à operação, então temos que compensar na resposta final retirando-o:

$$6 \times 19 = 6 \times (19 + 1) - 6 \times 1 = 6 \times 20 - 6 = 120 - 6 = 114.$$

Com a divisão é similar. Por exemplo, a divisão 105 por 3 é mais difícil do que 99 por 3, então a estratégia é transformar 105 em 99, subtraindo 6 de 105. Assim ficará $99 \div 3$. Porém o 6 não pode ser abandonado, logo teremos que dividir 6 por 3 também, e por fim somar o resultado das duas divisões, veja:

$$105 \div 3 = (105 - 6) \div 3 + (6 \div 3) = 99 \div 3 + 6 \div 3 = 33 + 2 = 35.$$

2.3.3 Fatoração

É uma estratégia que pode ser utilizada para efetuar uma divisão, na qual o divisor é fatorado. Por exemplo, na divisão de 180 por 4, fatoramos o divisor 4 como $4 = 2 \times 2$ e efetuaremos a divisão de 180 por 2 e o resultado dividiremos novamente por 2. Assim, temos:

$$180 \div 4 = (180 \div 2) \div 2 = 90 \div 2 = 45.$$

Logo, o resultado da divisão de 180 por 2 é 45.

2.3.4 Subtrações sucessivas

Essa é uma estratégia utilizada nas contas de divisão. Por exemplo, para efetuarmos a divisão $15 \div 5$, podemos utilizar a estratégia de subtrair o 5, que é o divisor, sucessivamente até chegar no 0, resto desta divisão. A quantidade de vezes que o 5 foi subtraído será o resultado da divisão. Efetuando $15 \div 5$, temos:

$$\begin{aligned} 15 - 5 &= 10 \\ 10 - 5 &= 5 \\ 5 - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Perceba que foi necessário subtrair o 5 três vezes até chegar no resto 0. Então, o resultado da divisão $15 \div 5$ vale3.

2.4 Estratégias de cálculo mental com números não negativos

Caney e Watson (2003) *apud* Carvalho (2011) realçam a importância de perceber a relação entre diferentes representações de um número racional para que se consiga desenvolver o cálculo mental com números racionais. Em um estudo dessas autoras em uma sala de aula, elas perceberam que os alunos utilizam algumas estratégias para realizar cálculo mental com números racionais. Abaixo serão apresentadas algumas dessas estratégias.

2.4.1 Mobilização de regras memorizadas

Nessa estratégia os alunos memorizam regras de cálculo e quando aparece uma operação eles aplicam. Por exemplo, para efetuar mentalmente o cálculo $10{,}3 \times 20$, pode-se, inicialmente, deslocar a vírgula uma casa decimal para direita, transformando $10{,}3$ em 103. Depois basta calcular mentalmente o produto $103 \times 20 = 2060$. Como anteriormente a vírgula foi deslocada uma casa decimal para a direita no número $10{,}3$, agora é necessário fazermos um reajuste deslocando a vírgula uma casa decimal para esquerda no número 2060, obtendo assim o resultado $206{,}0$, ou seja, 206.

2.4.2 Utilização de equivalência

A estratégia consiste em substituir uma fração que não facilita muito no cálculo por uma equivalente. Na maioria dos casos isso ocorre quando precisa-se calcular mentalmente frações com denominadores diferentes e para isso determinar uma fração equivalente, ou seja, que não altera a fração original e a substitui. Por exemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}.$$

Perceba que houve a substituição da fração $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{4}$ porque elas são equivalentes e $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ têm o mesmo denominador, o que facilita o cálculo mental.

Assim, o cálculo mental envolve a mobilização de diferentes estratégias que permitem simplificar e tornar os cálculos mais eficientes. A partir disso, no capítulo seguinte serão analisados os livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental, buscando identificar como essas estratégias são apresentadas e exploradas nas atividades propostas.

3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, são apresentados e analisados os livros didáticos da coleção Geração Alpha Matemática bem como as escolas selecionadas. Em seguida, serão descritos os principais conteúdos abordados em cada livro e analisadas as atividades que contemplam o cálculo mental, de forma explícita ou implícita estabelecendo relações com as orientações e competências proposta pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As escolas selecionadas para serem realizadas as análises dos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental foram: Escola Municipal Augusta Messias Guimarães e Escola Municipal Padre José de Souza, ambas localizadas na zona urbana do munícipio de Valença-Bahia. Essa escolha está diretamente ligada ao fato de as duas escolas possuírem convênio com o IFBA campus Valença para realização dos estágios supervisionados em matemática e, também, serem escolas parceiras do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), no subprojeto de matemática.

O próximo passo foi visitar as escolas, para se reunir com a direção delas. Na Escola Municipal Padre José de Sousa, apresentei à diretora a proposta do meu trabalho de conclusão de curso e destaquei o objetivo de fazer a análise de como o cálculo mental é abordado nos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental, sinalizando meu interesse em fazer análise dos livros desta escola. Prontamente ela me apresentou os livros didáticos de matemática adotados na escola, emprestando uma coleção completa para realização da análise. Após isso, realizei o mesmo processo de visitar a Escola Municipal Augusta Messias Guimarães, no entanto, após a diretora apresentar os livros didáticos de matemática, percebi que coincidiam com os mesmos livros adotados pela Escola Municipal Padre José de Souza.

Deste modo, os livros de matemática selecionados para a análise são os da coleção Geração Alpha Matemática, de autoria de Carlos Nely Clementino de Oliveira e Felipe Fugita. As obras são divididas em quatro volumes: 6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano. Esses livros foram publicados pela editora SM em 2022 e trata-se de materiais didáticos destinados aos anos finais do ensino fundamental e apresentam uma proposta pedagógica voltada ao desenvolvimento do raciocínio lógico matemático, resoluções de problemas e a construção contínua de conceitos matemático. Além disso, a coleção integra a edição 2024 do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD)[8].

[8] O PNLD é uma política pública do Governo Federal, executada pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e pelo Ministério da Educação (MEC), que tem como finalidade avaliar, selecionar e distribuir gratuitamente livros para as escolas públicas da educação básica.

Os livros têm seus conteúdos organizados de modo sistemático e gradual, contemplando os diferentes eixos matemáticos, tais como: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação, e apresentam textos, atividades, seções e boxes. No conjunto pretende-se que a coleção seja um material de apoio para o trabalho de professores e estudantes, a fim de alcançar o desenvolvimento das competências gerais e específicas da matemática. No início, são trazidas algumas informações importantes acerca da vida acadêmica dos autores Oliveira e Fugita e da editora responsável Isabella Semaan. As páginas seguintes trazem a ficha catalográfica, uma apresentação do livro para os estudantes e logo após, a seção "conheça seu livro".

A seção "conheça seu livro" expõe a estrutura organizacional dos livros didáticos, destacando os principais recursos pedagógicos que norteiam o processo de ensino-aprendizagem. De início é possível ver os conteúdos que serão desenvolvidos e abordados ao longo do processo de ensino. Os capítulos são constituídos por textos explicativos acerca dos assuntos trabalhados em cada capítulo, além de imagens, esquemas e atividades que promovem a construção do conhecimento de forma gradual e sistematizada.

Na página do sumário é possível compreender como os conteúdos são organizados, sendo estes divididos em 8 unidades temáticas que envolvem diferentes áreas da matemática de modo que cada unidade é subdividida em capítulos. As unidades variam sempre entre dois e três capítulos. Nessa seção os textos são apresentados de maneira organizada e clara por meio de situações contextualizadas. De maneira geral, estão associadas a ilustrações, fotografias, gráficos, mapas, tabelas, dentre outros recursos, com o objetivo de facilitar a compreensão do conteúdo e promover o contato com vários jeitos de organização das informações.

No início das unidades há uma imagem que ocupa uma dupla de páginas. Essa imagem tem por finalidade despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes acerca do tema que será abordado na unidade. Os textos e as questões propostas em "primeiras ideias", que fica localizada na segunda página ocupada pela imagem, buscam incentivar os alunos a explorarem a imagem, assim estabelecendo relações dos assuntos que serão estudados. Ainda sobre as questões propostas, elas podem ser utilizadas para diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema, dessa forma fazendo uma avaliação inicial da turma.

Em algumas unidades consta a seção: ampliando horizontes, que como o próprio nome sugere visa ampliar a abordagem dos conteúdos trabalhados ao longo da unidade, fazendo assim uma ponte entre as relações matemáticas, questões presentes no cotidiano e outras áreas de conhecimento. Essa seção busca ainda, estimular a reflexão crítica o raciocínio lógico e a contextualização dos conteúdos de maneira a promover uma aprendizagem mais significativa,

mostrando que a matemática está inserida em atividades do dia a dia, colocando em pauta reflexões como consumo, mídia, cidadania, entre outros, com base em temas relacionados a Educação Financeira, convidando o aluno a pensar sobre como nossos valores influenciam nas nossas vidas. Principais objetivos dessa seção:

1. Formar para cidadania.
2. Desenvolver a cultura de prevenção.
3. Formar multiplicadores de conhecimento.
4. Ensinar a planejar em curto, médio e longo prazos.
5. Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável.
6. Oferecer conceitos e ferramentas para tomadas de decisões autônomas com base em mudanças de atitude.

A seção “resolvendo problemas” aparece em dois momentos em cada livro e um dos principais objetivos é apresentar aos estudantes situações-problema diversificadas, buscando estimular o interesse por estratégias de resolução, identificar informações pertinentes, e a tomada de decisões individuais e em grupos com o intuito de comunicá-las, mostrando assim que esse é um ato importante a ser realizado na vida em sociedade. Além disso está estruturada do seguinte modo: para iniciar, contextualização e a apresentação da proposta, exposição de questões em ser investigadas e apresentação da prática de pesquisa e do instrumento de coleta.

A seção “investigar” é encontrada em dois momentos no livro em cada volume, sempre no final das unidades 4 e 8, permitindo ao aluno entrar em contato com diferentes metodologias de pesquisa, como entrevistas, observação de campo dentre outras, com o objetivo de desenvolver nos alunos habilidades de comunicação ao compartilhar os resultados da investigação.

Posterior a essa seção temos a seção “atividades integradas”, que tem por finalidade relacionar conteúdos trabalhados ao longo da unidade por meio de metodologias e práticas que estimulem a aplicação de estratégia de conhecimentos, promovendo assim o raciocínio crítico dos estudantes. Essa seção favorece ainda aplicações práticas da matemática e mistura os conteúdos matemáticos trabalhados ao longo de toda a unidade, fazendo assim uma revisão, porém sem ficar apenas restritos a exercícios mecânicos. Em suma são atividades que exigem do aluno bastante interpretação. Essas atividades englobam em geral, situações-problema, tabelas, jogos, imagens ilustrativas, entre outros.

No final de cada uma das obras consta a seção “interação”, que oferece aos alunos a

oportunidade de planejar e realizar um projeto. Assim esse projeto, construído em grupo, visa promover a cooperação, capacidade de resolver problemas e comunicação. Além disso essa seção tem uma proposta de trabalho colaborativo como forma de correlacionar os conteúdos já vistos a situações práticas, possibilitando assim um projeto interdisciplinar.

3.1 Descrição individualizada dos livros analisados

Nesta seção, será apresentada uma descrição dos livros analisados. Cada volume é dividido em unidades, subdivididas em capítulos.

3.1.1 Descrição do livro Geração Alpha do 6° ano

Os conteúdos trabalhados no livro Geração Alpha do 6° ano do ensino fundamental anos finais, estão divididos em 8 unidades: sistema de numeração e números naturais; geometria; divisibilidade; localização, semelhanças e construções geométricas; números racionais na forma fracionária; números racionais na forma decimal; probabilidade e estatística; e grandezas de medidas.

Figura 17 - Capa do livro da Coleção Geração Alpha 6° ano



Fonte: Arquivo pessoal

1 A unidade **Sistema de numeração e números naturais** é dividida em dois capítulos, sendo eles:
    1 **Sistema de numeração**: Esse capítulo inicia com um texto e uma imagem que retratam a origem dos números, atrelando sempre o surgimento dos números a necessidade do homem de registrar quantidades. Logo depois, o capítulo segue falando dos diferentes sistemas de numerações: sistema de numeração egípcio, romano e o indo-arábico.
    2 **Números naturais e operações com números naturais**: De início esse capítulo traz um texto falando sobre os números no dia a dia, mostrando através de um tema transversal como os números estão inseridos no nosso cotidiano. Posterior a isso, fala sobre representação dos números naturais na reta numérica, comparação de números naturais e por fim as operações com números naturais.

2 A unidade **Geometria** é dividida em:
    1 **Noções primitivas e ângulos:** Esse capítulo se inicia com um texto falando sobre noções primitivas: ponto reta e plano, além de uma imagem que retrata os trilhos de um trem que o texto relaciona intuitivamente com posição relativa de retas. Após isso, encontram-se os entes primitivos da geometria**:** ponto, reta e plano. Dando continuidade, o capítulo fala sobre semirretas e segmentos de retas, ângulos e por fim posições relativas entre retas e plano.
    2 **Figuras Geométricas:** O capítulo inicia com o texto "classificação de figuras geométricas", que tem como objetivo evidenciar a presença das figuras geométricas em diferentes contextos do cotidiano, sejam em casas, sala de aula e em outros ambientes. Por fim, são apresentados os sólidos geométricos, destacando suas principais características e aplicações.

3 A unidade **Divisibilidade** é dividida em:
    1 **Múltiplos e divisores:** O referido capítulo inicia com o texto "sequências numéricas", que fala sobre os jogos olímpicos, relacionando os anos que ocorrem esses jogos com sequências. Posterior a isso, o capítulo traz exemplos de sequências. Dando continuidade, aborda os assuntos: múltiplos e divisores, divisores de um número natural, relações entre múltiplos e

divisores e finaliza com critérios de divisibilidade.

2. **Números primos:** O presente capítulo inicia com o texto “números primos e números compostos”, que aborda a importância dos números para área computacional. Em seguida, introduz o conceito de números primos, caracterizando-os como aqueles que possuem apenas dois divisores positivos distintos. E para finalizar fala sobre decomposição em fatores primos.

4 A unidade **Localização, semelhanças e construções geométricas** é dividida em:

1. **Coordenadas:** O capítulo tem início com texto, “localização” e a imagem de uma biblioteca. O texto relata que, em algumas bibliotecas que dispõem de computadores, os leitores podem localizar seu livro por meio de um catálogo digital. Nesse catálogo, cada obra possui um código que fornece informação como assunto do livro, autor, entre outras características. A partir dessa situação, o texto estabelece uma relação com a utilização de referências para determinar a localização de objetos ou pessoas. Dando continuidade, são abordados os assuntos: localização de pontos e plano cartesiano.
2. **Semelhanças:** Esse capítulo se inicia com o texto “figuras e semelhanças”, que fala sobre ângulos em fotos, trazendo relação de semelhança em uma foto do Parque Nacional de Teide. Dando continuidade, fala sobre: Ampliação, Redução e Reprodução na malha quadriculada.
3. **Construções geométricas:** Neste capítulo são trabalhadas a construção de retas paralelas e quadriláteros, utilizando a régua e o esquadro como instrumentos geométricos.

5 A unidade **Números racionais na forma fracionária** é dividida em:

1. **Frações:** O capítulo em questão inicia com situações que envolvem frações, a exemplo da bandeira da Bélgica e a divisão de uma forma de bolo. Posterior a isso, são apresentados os tipos de fração, números mistos, fração de um número, frações equivalentes, simplificação de frações e comparação de frações.
2. **Operação com frações:** O referido capítulo inicia com o estudo das operações de adição e subtração de frações. Por conseguinte, dá continuidade ao conteúdo com a abordagem das operações de multiplicação, divisão, potenciação e porcentagem. No decorrer do capítulo, são apresentadas

diferentes representações visuais, por meio de figuras e ilustrações, que auxiliam na compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados, tornando a aprendizagem mais significativa.

6 A unidade **Números racionais na forma decimal** é dividida em:

1 **Números na forma decimal:** O capítulo inicia com várias situações do nosso cotidiano em que nos deparamos com números na forma decimal, como em peso na balança digital, indicação de preço de algumas mercadorias, notas das escolas de samba no carnaval dentre outros. Dando continuidade, trabalha com parte inteira e parte decimal. Finaliza com diferentes representações de um número na forma decimal e números na forma decimal equivalentes.

2 **Operações com números na forma decimal:** O presente capítulo trata sobre números decimais e as operações com números na forma decimal: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Além disso, o capítulo relaciona números decimais e porcentagem.

7 A unidade **Probabilidade e estatística** é dividida em:

1 **Probabilidade:** O capítulo se inicia com o texto “ideia de probabilidade”, trata-se de um texto do IBGE que apresenta dados da população brasileira, utilizando informação do cotidiano para dar início ao conceito de probabilidade. Através dessa contextualização, são explorados os assuntos: experimento aleatório, espaço amostral e evento. Ao longo do capítulo, são desenvolvidos por meio de exemplos, situações-problema e atividades que visam estimular os alunos a interpretar diferentes possibilidades em situações práticas.

2 **Estatística:** Esse capítulo se inicia com pesquisa estatística, evidenciando assim a importância da coleta e da análise de dados que envolvem situações do nosso cotidiano. Posterior a isso, são abordados os conceitos de população, amostra e variável, que tem como principal objetivo fundamentar o desenvolvimento do conteúdo. Na sequência são exploradas as etapas de uma pesquisa estatística, desde a coleta até a representação dos dados por meio de tabelas e gráficos. As atividades que são propostas ajudam no desenvolvimento da capacidade de analisar informações, interpretar dados e construir conclusões.

8 A unidade **Grandezas de medidas** é dividida em:

1 Comprimento, área, volume e capacidade: Este capítulo inicia falando sobre Sistema Internacional de unidades (SI), introduzindo as principais unidades de medida e sua importância no cotidiano**.** Dando seguimento, são desenvolvidos os conceitos de comprimento, área, volume e capacidade, através de exemplos contextualizados aliados a atividades práticas e situações-problemas.

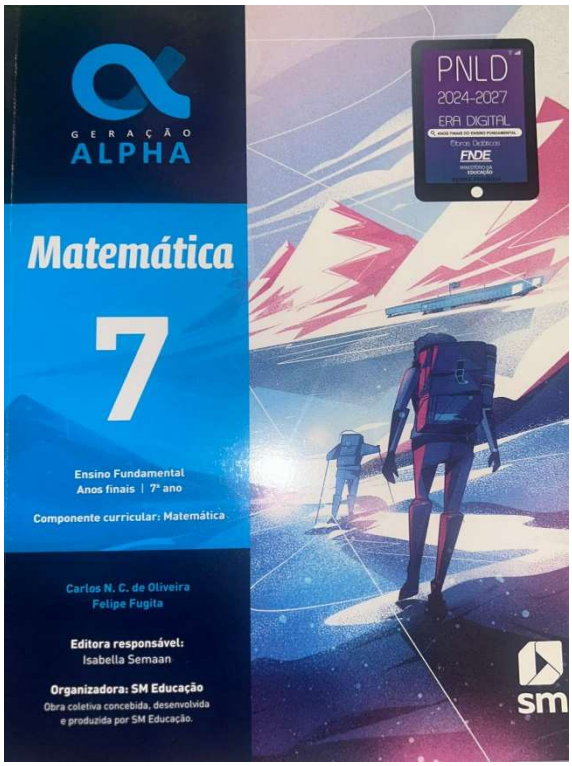
2 Vistas e plantas baixas: O referido capítulo inicia com a apresentação dos conceitos de vistas e plantas baixas, permitindo ao aluno compreender diferentes formas de representação de objetos e espaço. Em seguida, são propostas atividades que desenvolvem a interpretação e a elaboração dessas representações. Essa seção é finalizada com o estudo de escalas, destacando sua importância para leitura e construção de plantas e mapas por meio de exercícios contextualizados.

3 Massa, temperatura e tempo: O referido capítulo inicia com o assunto de medidas de massas, apresentando as principais unidades de massa, por meio de exemplos e atividades que colaboram na compreensão do conteúdo. Em seguida, são trabalhadas as transformações entre unidades de medida e massa. E para finalizar o capítulo, são trabalhados os assuntos de: medidas de temperatura e medidas de tempo, explorando suas unidades, instrumentos de medição e aplicações em situações do dia a dia, contribuindo assim, para o desenvolvimento das habilidades de interpretação e resoluções de problemas.

3.1.2 Descrição do livro Geração Alpha do 7° ano

O livro Geração Alpha do 7° ano do ensino fundamental anos finais, está dividido nas seguintes unidades: números; números racionais; figuras geométricas; introdução à álgebra; proporcionalidade e porcentagem; circunferência, círculo e transformações geométricas; probabilidade e estatística grandezas ;medidas.

Figura 18 - Capa do livro da Coleção Geração Alpha 7° ano



Fonte: Arquivo pessoal

1 A unidade **Números** possui os seguintes capítulos:

1 **Múltiplos e divisores:** O presente capítulo inicia propondo situações-problema sobre divisão, e a partir dessas questões, diferencia a divisão exata da não exata. Dando continuidade, fala sobre múltiplos de um número natural, mínimo múltiplo comum (mmc), divisores de um número natural e finaliza com máximo divisor comum (mdc).

2 **Números inteiros:** O referido capítulo inicia dando exemplos de situações do nosso dia a dia em que aparecem os números negativos, por exemplo, quando medimos a temperatura. Logo após isso é feita a apresentação dos números inteiros partindo dos números naturais. Dando continuidade fala sobre: a representação de números inteiros na reta numérica, sucessor e antecessor de um número inteiro e finaliza com comparação de números inteiros.

3 **Operações com números inteiros:** O capítulo inicia falando com o estudo de adição de números inteiros, apresentando situações contextualizadas que favorecem a compressão desse conjunto numérico. Em seguida, são abordadas operações de subtração, multiplicação e divisão, explorando suas propriedades e aplicações por meio de exemplos e situações-problema. Os

exercícios propostos visam contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

2 A unidade **Números racionais** possui os seguintes capítulos:

1 **Números racionais:** Esse capítulo inicia com um texto mostrando que os números racionais estão inclusos em diversas situações do nosso cotidiano, promovendo assim uma contextualização do conteúdo. Dando sequência, são apresentados os números racionais na forma fracionária e decimal, destacando suas representações e equivalências. Por fim, finaliza com comparação dos números racionais e atividades que exploram a comparação e a ordenação desses números.

2 **Operações com números naturais:** Esse capítulo inicia com o estudo das operações de adição e subtração envolvendo números racionais. Em seguida, são desenvolvidas as operações de multiplicação e divisão. Além disso são propostos exemplos, estratégias de resolução e exercícios que contribuem na compreensão e aplicação desses conteúdos em diferentes situações.

3 A unidade **Figuras geométricas** possui os seguintes capítulos:

1 **Ângulos:** O referido capítulo inicia falando sobre medida de ângulo e logo após ensina como construir um ângulo usando transferidor, régua e lápis. Dando continuidade fala sobre operações com medidas de ângulos e finaliza com ângulos congruentes, adjacentes, complementar, suplementar, opostos pelo vértice e duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

2 **Polígonos:** O presente capítulo inicia falando sobre os elementos de um polígono e propõe atividades que objetivam estimular a compreensão do estudante acerca do conteúdo. Em seguida dá continuidade falando de diagonais de um polígono, ângulos de um polígono e finaliza com triângulos.

4 A unidade **Introdução à álgebra** possui os seguintes capítulos:

1 **Expressões algébricas:** Esse capítulo inicia definindo o que é uma expressão algébrica acompanhado de exemplos que facilitam a compreensão do conteúdo. Em seguida, são abordados os termos que compõem uma expressão algébrica, bem como a simplificação de uma expressão algébrica. Por fim, finaliza falando sobre sequências e expressões algébricas, através de

atividades que estimulam o reconhecimento de padrões e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

2 **Equações:** O capítulo inicia definindo o que é uma equação e em seguida traz vários exemplos que estimulam a compreensão do conteúdo. Na sequência são abordados os conceitos de solução ou raiz de uma equação, seguidos dos estudos das equações do 1° grau com incógnita. Finalmente, finaliza com equação com duas incógnitas, aliada a atividades propostas que possibilitam ao aluno aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de diferentes situações-problema.

5 A unidade **Proporcionalidade e porcentagem** possui os seguintes capítulos:

1 **Razão e proporção:** O referido capítulo inicia definindo o que é uma razão e logo após fala sobre antecedente e consequente. Na sequência são abordados exemplos que envolvem proporção e depois sua definição. Finaliza o capítulo com sequências diretamente ou inversamente proporcionais, grandezas diretamente ou inversamente proporcionais e regra de três.

2 **Porcentagem:** Esse capítulo inicia com situações-problema contextualizadas que evidenciam a aplicação da porcentagem no nosso dia a dia. No decorrer da seção, são desenvolvidas atividades que exploram o cálculo de porcentagem, bem como sua interpretação, possibilitando ao aluno compreender sua utilização em diversos contextos a exemplo de descontos, acréscimos, entre outras aplicações práticas.

6 A unidade **Circunferência, círculo e transformações geométricas** possui os seguintes capítulos:

1 **Circunferência e círculo:** O capítulo inicia falando sobre circunferência e seus elementos. Em sequência, são abordados os conceitos de posições relativas entre ponto e circunferência, e entre duas circunferências, através de atividades e exemplos que contribuem para a compreensão das relações geométricas envolvidas.

2 **Transformações geométricas:** De início esse capítulo traz um texto falando sobre simetria e várias figuras simétricas presentes no cotidiano. Por conseguinte, são desenvolvidos conceitos relacionados às transformações geométricas, bem como representar e compreender diferentes tipos de

transformação no plano.

7 A unidade **Probabilidade e estatística** possui os seguintes capítulos:

1 **Probabilidade:** Esse é um capítulo bem curto que apresenta brevemente os conceitos fundamentais de probabilidade de maneira objetiva e contextualizada. No início são explorados os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral e evento. No decorrer do capítulo, são propostas atividades que promovem a interpretação de situações de incerteza, além da aplicação dos conceitos estudados na resolução de situações-problema.

2 **Estatística:** O presente capítulo inicia falando sobre população e amostra destacando sua importância para realização de pesquisas estatísticas. Por conseguinte, dá continuidade falando sobre gráficos e sua construção, bem como o conceito de média aritmética. Por fim, são tratadas as etapas de uma pesquisa estatística desde o processo de coleta até a interpretação de dados.

8 A unidade **Grandezas e medidas** possui os seguintes capítulos:

1 **Medições:** De início o capítulo fala sobre o conceito de medição, evidenciando sua importância em situações presentes em nosso dia a dia. Dando sequência são tratadas as unidades de medida padronizadas e não padronizadas, por meio de atividades e situações-problema que possibilite ao aluno compreender suas diferenças bem com suas aplicações e padronização de medidas.

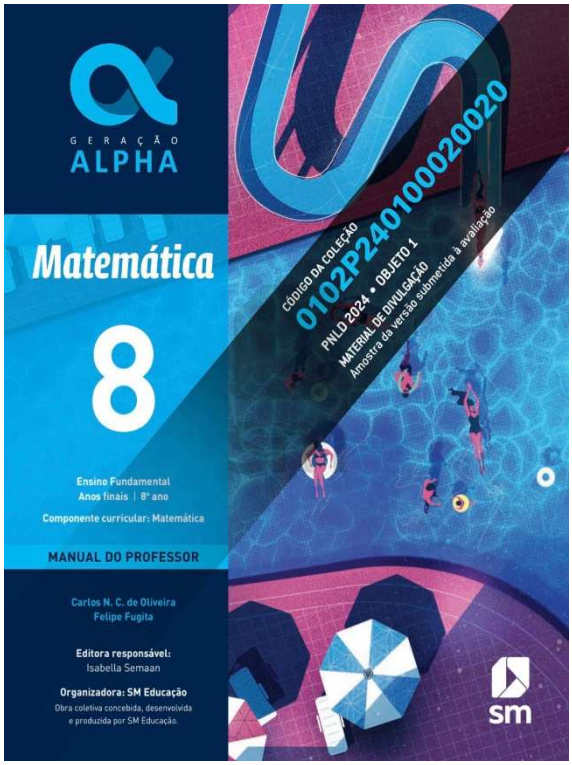
2 **Áreas e volumes:** O capítulo começa seu estudo falando sobre área, abordando inicialmente a área do retângulo, e posterior a isso, as áreas do paralelogramo, triângulo, trapézio e losango. Apesar de ser um capítulo breve, são desenvolvidas atividades que favorecem a compreensão das fórmulas além de suas aplicações. Para finalizar, é apresentado o conceito de volume, assim como seu cálculo e situações com contextualização.

3.1.3 Descrição do livro Geração Alpha do 8° ano

O livro Geração Alpha do 8° ano do ensino fundamental anos finais, está dividido nas seguintes unidades: potenciação e radiciação, cálculo algébrico, equações e sistemas, triângulos e quadriláteros, sequências e proporcionalidade, construções e transformações geométricas,

probabilidade e estatística, e grandezas e medidas.

Figura 19 - Capa do livro da Coleção Geração Alpha 8° ano



Fonte: Arquivo pessoal

1 A unidade **Potenciação e Radiciação** está subdividida nos capítulos:
    1 **Potenciação:** O presente capítulo inicia com exemplos envolvendo potência de expoente inteiro natural. Por conseguinte, apresenta as propriedades da potenciação e, por último aborda a simplificação de expressões e notação científica.
    2 **Radiciação:** Para começar esse capítulo traz um texto introdutório falando sobre raiz quadrada de um número racional. Na sequência, apresenta as raízes quadradas exatas e aproximadas de um número. Por fim, finaliza com o estudo de raiz cúbica de um número racional, raiz enésima de um número racional e propriedades dos radicais.

2 A unidade **Cálculo Algébrico** está subdividida nos capítulos:
    1 **Expressões Algébricas:** De início o capítulo traz um texto de situações que envolvem expressões algébricas e prossegue trazendo exemplos que favorecem a compreensão do conteúdo. Por fim, aborda o cálculo do valor

numérico de uma expressão algébrica.

2 **Polinômios:** Esse capítulo inicia com o estudo de monômios, trazendo sua definição e exemplos. Dando continuidade, fala sobre operações com monômios, e posterior a esse assunto, inicia o de polinômios e fala sobre: sua definição, redução a termos semelhantes, grau de um polinômio e finaliza com operações com polinômios.

3 A unidade **Equações e Sistemas** está subdividida nos capítulos:

1 **Equações:** O referido capítulo começa tratando sobre equação do 1° grau com uma incógnita, e em seguida fala sobre uma aplicação da equação do primeiro grau: cálculo de fração geratriz de uma dízima periódica. Após isso, trata de equação do 1° grau com duas incógnitas. Por fim, finaliza com equação do 2° grau com uma incógnita.

2 **Sistema de equação do primeiro grau:** O capítulo inicia tratando do assunto sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas e prossegue com resolução de um sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas, objetivando desenvolver diferentes estratégias para resolver sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas.

4 A unidade **Triângulos e Quadriláteros** está subdividida nos capítulos:

1 **Triângulos:** O referido capítulo inicia tratando dos elementos de um triângulo, e em seguida, fala das classificações dos triângulos, condição de existência, relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes e finaliza com mediatriz e congruência de triângulos.

2 **Quadriláteros:** Esse capítulo inicia com o estudo dos elementos de um quadrilátero. Em seguida, suas classificações e a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo. Para fechar o capítulo, fala sobre paralelogramos e traz exemplos de aplicações.

5 A unidade **Sequências e proporcionalidade** está subdividida nos capítulos:

1 **Sequências:** Esse capítulo, apesar de ser breve, apresenta as definições de sequências numéricas e sequências de figura. A seguir propõem alguns exemplos e atividades a serem resolvidos para aplicação dos conceitos estudados, assim finalizando o capítulo.

2 **Proporcionalidade:** O presente capítulo inicia com o estudo das grandezas e sequências diretamente proporcionais, apresentando exemplos para explorar os conceitos já vistos. Para finalizar, aborda as grandezas e sequências inversamente proporcionais também acompanhadas com exemplos, visando ampliar o conhecimento dos alunos acerca do conteúdo.

6 A unidade **Construções e Transformações geométricas** está subdividida nos capítulos:

1 **Construções Geométricas:** De início o capítulo traz um texto sobre bissetriz, tratando de sua definição e construção com compasso e régua. Para finalizar, fala de polígonos regulares inscritos em uma circunferência.

2 **Transformações Geométricas no plano:** O referido capítulo inicia tratando das isometrias e, em seguida, aborda a reflexão e rotação. Por fim, apresenta a composição de transformações trazendo vários exemplos que exploram tudo o que foi visto ao longo do capítulo.

7 A unidade **Probabilidade e Estatística** está subdividida nos capítulos:

1 **Probabilidade:** Esse capítulo inicia falando da árvore das possibilidades. Logo após, aborda o princípio fundamental da contagem. Finaliza com probabilidade e exemplos que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico de contagem.

2 **Estatística:** O presente capítulo começa com um texto falando sobre medidas de tendência central. Na sequência, aborda os conceitos de: moda, média e mediana. Para finalizar, trata das medidas de dispersão, da pesquisa estatística e dos diferentes tipos de gráficos.

8 A unidade **Grandezas e medidas** está subdividida nos capítulos:

1 **Áreas:** De início o capítulo traz um texto que retoma a ideia de área já vista pelos alunos no sétimo ano. Em seguida, apresenta os conceitos de área do retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, trapézio, losango e círculo, além de exercícios e situações-problema acerca de tudo visto ao longo do capítulo.

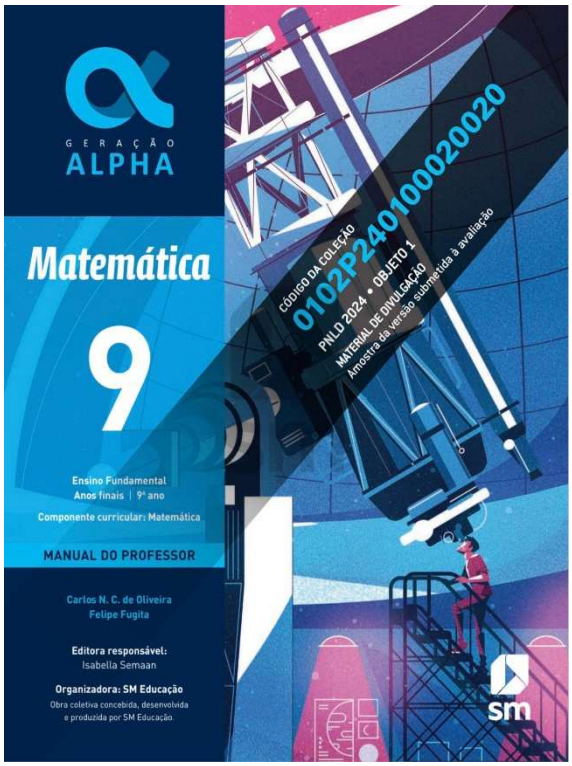
2 **Volumes e capacidades:** O capítulo inicia retomando as ideias associadas a volume e capacidade já vistas no sétimo ano pelos alunos. Apesar de ser breve,

essa seção ensina como calcular o volume do cubo, cilindro e apresenta atividades que facilitam a compreensão dos conteúdos no decorrer do capítulo.

3.1.4 Descrição do livro Geração Alpha do 9° ano

O livro Geração Alpha do 9° ano do ensino fundamental anos finais, está dividido nas seguintes unidades: conjuntos numéricos; potenciação e radicâção; retas e ângulos, semelhança e triângulo retângulo; produtos notáveis, fatoração e equações; geometria; funções; probabilidade e estatística; e grandeza e medidas;

Figura 20 - Capa do livro da Coleção Geração Alpha 9° ano



Fonte: Arquivo pessoal

1 A unidade **Conjuntos numéricos, Potenciação e Radiciação** está dividida nos capítulos:

    1 **Conjuntos Numéricos:** De início o capítulo traz um texto e uma imagem do Parque Nacional do Serengeti, correlacionando a necessidade de contar com o surgimento dos números naturais. Dando continuidade traz, a representação dos números naturais na reta e a comparação entre números naturais. Após

isso tem um texto falando que os números naturais não foram suficientes para suprir as demandas da sociedade e então houve a necessidade do surgimento dos números inteiros. Posterior a isso, é trazida a representação na reta dos números inteiros. Para finalizar, também é apresentada uma abordagem acerca dos conjuntos racionais, irracionais e reais.

2 **Potenciação e radiciação:** O presente capítulo inicia com o estudo da potenciação, apresentando seu conceito e as principais propriedades. Em seguida, aborda a notação científica, evidenciando sua utilização na representação de números muito grandes ou muito pequenos. Para finalizar, fala de radiciação e suas propriedades, explorando assim os conceitos e propriedades por meio de exemplos.

2 A unidade **Razão, proporção e matemática financeira** está dividida nos capítulos:

1 **Razão e proporção:** O presente capítulo inicia tratando sobre razão e propondo vários exemplos que objetivam auxiliar na compreensão do conteúdo. Por fim, fala sobre o conceito de proporção destacando suas propriedades, aplicações e finaliza com regra de três.

2 **Matemática financeira:** De início o capítulo trata de porcentagem e propõe vários exemplos e situações do dia a dia para sua aplicação. Para finalizar, traz um carde explicativo falando sobre juros simples e compostos, destacando suas principais características e diferenças.

3 A unidade **Retas e ângulos, semelhança e triângulo retângulo** está dividida nos capítulos:

1 **Retas e ângulos:** O capítulo começa com uma abordagem sobre retas cortadas por uma transversal explorando as relações entre ângulos formados. Na sequência, apresenta razão entre segmento, feixes de retas paralelas cortadas por uma transversal e Teorema de Tales, ilustrando o conteúdo com exemplos.

2 **Semelhança:** Para começar, o capítulo traz um texto introdutório sobre figuras semelhantes. Em seguida fala sobre semelhança de polígonos e semelhança aplicada a triângulos. Por fim, trata dos casos de semelhanças de triângulos acompanhados de exemplos e exercícios.

3 **Triângulo retângulo:** De início esse capítulo fala sobre triângulo retângulo,

seus elementos, medidas e relações métricas. Em seguida desenvolve o estudo do Teorema de Pitágoras, propondo exemplos que permitam sua aplicação em diversas situações.

4 A unidade **Produtos notáveis, fatoração e equações** está dividida nos capítulos:

1 **Produto notáveis:** De início o capítulo faz uma abordagem sobre produtos notáveis, apresentando suas principais identidades algébricas através de exemplos. Por conseguinte, estuda os diferentes tipos de fatoração: fator comum em evidência, agrupamento, diferença de dois quadrados, trinômio quadrado perfeito e por fim soma e diferença de dois cubos.

2 **Frações algébricas:** O capítulo inicia falando de fração algébrica abordando seu valor numérico e os processos de simplificação. Para encerrar apresenta as operações que envolvem frações algébricas e exemplos que exploram todo o conteúdo visto no capítulo.

3 **Equações do 2° grau:** De início o capítulo traz uma abordagem de equações do 2° grau com uma incógnita apresentando sua definição e diversos exemplos. Em seguida diferencia equações incompletas e completas e apresenta exemplos que retomam todo o conteúdo.

5 A unidade **Geometria** está dividida nos capítulos:

1 **Distâncias:** De início o capítulo fala sobre plano cartesiano e distância entre dois pontos no plano cartesiano. Na sequência apresenta os conceitos de ponto médio de um segmento no plano cartesiano e perímetro e área de figuras planas, no plano cartesiano, propondo exemplos para a aplicação dos conceitos.

2 **Circunferências e polígonos regulares:** O capítulo inicia fazendo uma abordagem sobre circunferência e seus principais elementos. Após isso fala sobre polígonos regulares e propõe a construção de polígonos regulares com régua e compasso.

3 **Vistas:** De início o capítulo aborda a representação de vistas de objetos, desenvolvendo a percepção espacial dos alunos. Por fim, são apresentadas noções de perspectiva através de exemplos ilustrativos.

6 A unidade **Funções** está dividida nos capítulos:

1. **Introdução às funções:** O capítulo começa trazendo uma noção de função. Após isso aborda a lei de formação e o cálculo do valor de uma função, encerra com a representação gráfica e exemplos que exploram os conceitos vistos até então.
2. **Função afim:** O capítulo inicia trazendo a definição de função afim e exemplos. Logo após isso há a construção de gráficos, variação e estudo de sinal de uma função afim.

7. A unidade **Probabilidade e estatística** está dividida nos capítulos:
    1. **Probabilidade:** O capítulo tem seu início falando sobre experimento aleatório, espaço amostral e eventos. Finaliza com exemplos envolvendo o cálculo de probabilidade e probabilidade condicional.
    2. **Estatística:** De início o capítulo aborda as medidas de tendência central, destacando média, moda e mediana. Finaliza com medidas de dispersão, além da organização e interpretação de dados por meio de tabelas e gráficos.

8. A unidade **Grandezas e medidas** está dividida nos capítulos:
    1. **Algumas grandezas:** De início o capítulo fala sobre prefixos do sistema internacional de medida (SI) de unidades. Na sequência apresenta os conceitos de unidade de medida de comprimento, unidade de medida de massa e unidade de medida de informática, propondo exemplos de aplicação.
    2. **Volume:** O referido capítulo inicia com um texto introdutório sobre sólidos geométricos acerca de algumas figuras não planas retomando suas características. Em seguida apresenta o cálculo do volume de um prisma, da pirâmide, do cilindro e do cone finalizando com exemplos e situações práticas que revisitam o que foi visto ao longo de todo o capítulo.

3.2 Análise sobre a abordagem do cálculo mental nos livros didáticos de matemática

3.2.1 Análise do livro Geração Alpha do 6° ano

Unidade 1, Sistema de numeração:

Na unidade 1, é perceptível que o cálculo mental não é trabalhado de forma isolada. Sua abordagem ocorre através de atividades que instigam os alunos a terem autonomia e criar suas

próprias estratégias, tal qual como é previsto pela BNCC. Além disso essa unidade explora as propriedades das operações e utiliza a decomposição numérica para efetuar as operações antes mesmo da aplicação de algoritmos convencionais.

No capítulo 1, Sistema de numeração, página 17, o livro apresenta formas diferentes de decompor um mesmo número. Exemplo: $24753 = 24000 + 750 + 3$ ou $24753 = 24700 + 50 + 3$.

Embora o termo cálculo mental não seja apresentado explicitamente, a atividade se relaciona à concepção de cálculo mental discutida anteriormente, ao propor o uso de estratégias que facilitam a realização das operações. Nesse caso, destaca-se a decomposição dos números, apresentada na fundamentação teórica como uma estratégia que contribui para a realização do cálculo de forma mais eficiente.

Uma situação semelhante ocorre no capítulo 2, página 26, no tópico "adição de números naturais", onde o livro apresenta uma proposta para resolver um problema de adição por meio da decomposição que é uma estratégia do cálculo mental. No capítulo 2, Números naturais e operações com números naturais, na página 28, são apresentadas as propriedades comutativa, associativa e elemento neutro da adição. O livro incentiva o uso de tais propriedades para uma reorganização na ordem de efetuar a adição, facilitando a execução do cálculo mental. Exemplo: $16 + 25 + 4 = (16 + 4) + 25 = 20 + 25 = 45$. Ainda nesse capítulo, na seção sobre propriedades da adição, algumas adições são solicitadas para serem calculadas mentalmente como: $8 + 5$ e $5 + 8$, $11 + (3 + 6)$ e $(11 + 3) + 6$.

Na seção de atividades deste capítulo, na página 29, há uma lista de atividades, em que é possível notar que, durante a resolução das questões, a comparação entre diferentes estratégias para chegar a um mesmo resultado, evidenciando a presença do cálculo mental de forma implícita. Além disso, o exercício de número 20 solicita a realização de algumas adições mentalmente, como: $900 + 95 + 1100 + 5$. O tópico "subtração de números naturais", que se encontra na página 31, utiliza a decomposição para realizar uma subtração retomando novamente essa habilidade como uma estratégia para resolução de cálculos mentalmente. Exemplo: $627 - 326 = (600 - 300) + (20 - 20) + (7 - 6) = 300 + 0 + 1 = 301$.

No tópico sobre propriedade comutativa da multiplicação, página 39, são apresentadas duas multiplicações, em que o livro solicita que sejam calculadas mentalmente, exemplos: 4×7 e 7×4. No tópico de atividades da página 41, no exercício de número 46, é apresentada uma multiplicação por 99, sendo utilizada a estratégia de decomposição de 99 como $100 - 1$. O manual do professor recomenda essa estratégia para efetuar o cálculo mental, orientando seu

uso também para multiplicação por 101 e 102 decompondo como $100 + 1$ e $100 + 2$, respectivamente. Exemplo: $15 \times 99 = 15 \times (100 - 1) = 15 \times 100 - 15 \times 1 = 1500 - 15 = 1485$.

Unidade 5, Números Racionais na forma fracionária:

Na página 160, no manual do professor, são expostas as habilidades que serão exploradas ao longo da unidade, e entre elas cabe destacar: (EF06MA13) que propõe a elaboração problemas envolvendo porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. Esta é, uma habilidade que incentiva o uso do cálculo mental para resolução das questões e é prevista pela BNCC para os anos finais do ensino fundamental.

A seção atividade que se encontra no capítulo 1, referente a frações, na página 173, possui o exercício de número 21 sobre fração de uma quantidade, que no manual do professor recomenda-se que o docente incentive os alunos a resolverem as questões mentalmente. Exemplo: $\frac{8}{3}$ de 60. Na seção diversificando, localizada na página 179, é apresentado o exercício 6, que aborda comparação de frações, no manual do professor vem orientando explicitamente que os alunos devem resolver essa questão mentalmente. Exemplo: em uma sala de aula, $\frac{2}{3}$ dos estudantes jogam futebol e $\frac{3}{7}$ jogam vôlei. Qual esporte é mais praticado pelos estudantes dessa turma: futebol ou vôlei? Dessa forma, observa-se que embora o cálculo mental não seja abordado de maneira direta no livro do aluno, o manual do professor sempre solicita a exploração dessa habilidade pelo professor.

No capítulo 2, dedicado a operações com frações, na seção de porcentagem, página 194 do manual do professor é orientado que o docente estimule os alunos a resolverem os exercícios dessa seção utilizando cálculo mental. Na página 195, no exercício 28, referente ao conteúdo de porcentagem, é apresentado o exemplo "Calcule 50% de 440". Nesse caso, observa-se, de forma explícita, no manual do professor, a orientação para que o aluno resolva o cálculo mentalmente. Na página 196, na seção "Diversificando", o exercício 2 apresenta uma situação semelhante, também envolvendo cálculos de porcentagem, ao solicitar que o aluno determine mentalmente 25% de 800 ml

Unidade 6, Números racionais na forma decimal:

No início dessa unidade, página 202, são apresentadas as habilidades que serão exploradas, e entre elas tem-se a: (EF06MA13), prevista pela BNCC para o ensino fundamental anos finais, que propõe elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Percorrendo a seção 1, referente a Números na forma decimal, na página 212, há o exercício 14, em que no livro do aluno é solicitado que seja associado o número decimal à fração correspondente, e o manual do professor sugere claramente que os alunos resolvam esse exercício mentalmente. A página 220, do manual do professor, orienta que, ao trabalhar com adição e subtração de números na forma decimal, os estudantes devem ser incentivados a realizar essas operações mentalmente, simulando situações do dia a dia em que o cálculo rápido e aproximado é necessário.

Seguindo, na página 221, o exercício de número 4 apresenta adições e subtrações com números na forma decimal. No livro do aluno é orientado explicitamente que este efetue as contas através de algoritmos e em seguida use a aproximação e calcule novamente as adições e subtrações, mentalmente. Exemplo: efetuar $25{,}38 - 1{,}7$ usando algoritmo e suas respectivas aproximações e 25 menos 2 resolve através do cálculo mental.

Na seção 2, destinada a operações com números na forma decimal, página 224, no tópico de atividades, o exercício de número 17 propõe que os alunos resolvam alguns produtos por meio do cálculo mental. Exemplo: $158 \times 32{,}6$. A página 25, no manual do professor, contém instruções que estimulam o desenvolvimento dessa habilidade: ampliar o repertório de cálculo dos estudantes em relação à divisão, propondo que realizem mentalmente, por estimativa, alguns cálculos de divisão entre números naturais cujo quociente seja um número na forma decimal.

Partindo para página 230, no manual do professor, há sugestões incentivando o uso do cálculo mental, nos tópicos de atividades dessa página, referente a números na forma fracionária e decimal. As mesmas considerações são feitas na página 235, do tópico de atividades a respeito de números na forma decimal. Ainda nessa seção, no tópico "diversificando", da página 236, é sugerido no manual do professor que o exercício de número 5, que envolve multiplicação com números decimais seja efetuado mentalmente. O mesmo se repete no exercício 13, no entanto o cálculo a ser realizado envolve porcentagem.

E para finalizar, no tópico de atividades integradas, exercício de número 9, é orientado que o aluno realize um produto mentalmente utilizando estratégias de soma. Além disso, no manual do professor é solicitado que este faça uma autoavaliação com os alunos e uma das

perguntas dessa autoavaliação é: consigo efetuar diversos tipos de cálculo (mental ou escrito, exato ou aproximado) envolvendo operações com números na forma decimal? Estimula-se, assim, o desenvolvimento dessa habilidade.

Unidade 8, Grandezas e medidas:

Percorrendo o capítulo 1, dedicado a comprimento, área, volume e capacidade, na página 298, seção "diversificando", exercício 3, orienta-se que o aluno resolva um produto com números decimais mentalmente.

As demais unidades não houve menção explicita nem implícita acerca do cálculo mental. Ao realizar a análise desse livro, percebe-se uma presença significativa do cálculo mental ao longo das unidades. Embora, em alguns momentos, esta habilidade apareça explícita apenas no manual do professor, em outras situações, sua abordagem ocorre de maneira subjacente no livro do aluno, associada a estratégias e ao uso de decomposição e reorganização dos números.

Nesse sentido percebe-se que o cálculo mental permeia diferentes conteúdos, entretanto seu desenvolvimento não ocorre de maneira linear ao longo da obra, visto que tem unidades nas quais ele é mais estimulado, enquanto em outras sua utilização é menos frequente.

3.2.2 Análise do livro Geração Alpha do 7° ano

Unidade 1, Números:

No capítulo 1, referente a múltiplos e divisores, na seção "atividades", é exposto na página 16 o exercício de número 4, que sugere explicitamente para que os alunos calculem mentalmente e registre nos cadernos os múltiplos comuns não nulos entre 2 e 3, 3 e 5 e 2, 3, e 8. No exercício de número 9 também é solicitado que os alunos calculem mentalmente o mdc e mmc de alguns números.

Partindo para o capítulo 3, referente a Operação com números inteiros, na página 31 é apresentada uma situação que há o uso evidente de cálculo mental. A atividade propõe a adição $(158 + 215)$. Inicialmente, calcula-se $(155 + 215 = 370)$. Em seguida, como o objetivo é adicionar 158, e não 155, acrescenta-se as três unidades restantes ao resultado obtido, chegando-se a $(370 + 3 = 373)$. Na página 35, apresenta-se uma situação semelhante, porém envolvendo a operação de subtração $(578 - 275)$. Como o subtraendo da operação original é 285, e não 275, subtraem-se as dez unidades correspondentes da diferença obtida anteriormente, resultando em $(303 - 10 = 293)$. Em ambas as situações é utilizada a compensação como

estratégia de cálculo mental, em que um dos números é ajustado para facilitar a operação, e após isso o resultado é corrigido considerando a diferença entre o valor utilizado e o original.

No tópico "diversificando" da página 47, o exercício de número 3 orienta que os alunos realizem mentalmente diferentes cálculos envolvendo conceitos relacionados a números inteiros, como a metade do oposto de 44, o dobro de $40 \div (-4)$, o oposto do oposto de $(-13) \times 1$ e o oposto do dobro de $(-15) \times (-2)$.

Unidade 3, Figuras geométricas:

Nessa unidade, na seção 1, destinada ao estudo dos ângulos na página 114, o exercício 6 apresenta uma questão sobre ângulos complementares e suplementares. Embora a orientação para que o exercício seja respondido através do cálculo mental apareça implícita no livro do aluno, o manual do professor solicita explicitamente que os alunos a resolvam utilizando essa habilidade.

Na página 13, no tópico "atividades integradas", o exercício de número 3, referente às operações com medidas angulares, orienta claramente que o docente estimule o aluno a resolver a questão mentalmente. Exemplos propostos: calcule mentalmente a terça parte de $54°$ e a metade de $48°50'26''$.

Unidade 4, Introdução a álgebra:

Na seção 2, de equações, essa habilidade volta a aparecer na página 154, onde no manual do professor vem uma orientação indicando que o docente deve apresentar aos estudantes exemplos análogos antes de iniciar o trabalho com as técnicas para a obtenção da raiz de uma equação. Propõe-se assim, equações simples, permitindo que eles calculem e verifiquem mentalmente suas raízes. Exemplo: $x + 3 = -4$, então $x = -7$, pois $-7 + 3 = -4$.

Partindo para a página 157, no manual do professor é apresentada uma atividade complementar que visa promover o exercício do cálculo mental entre os alunos. Essa atividade propõe que os discentes determinem o conjunto solução das equações. Exemplo: $x + 5 = 4$.

Unidade 5, Proporcionalidade e porcentagem:

No início dessa unidade, página 176, são expostas as habilidades que serão exploradas ao longo do seu estudo, entre as quais se destaca a habilidade (EF07MA02). Essa habilidade propõe resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, incluindo situações de acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros, favorecendo assim o desenvolvimento dessa

pratica no decorrer das atividades propostas. Seguindo para o capítulo 2, no manual do professor fica explícito que um dos conteúdos que será abordado é Porcentagem envolvendo números na forma fracionária, na forma decimal e cálculo mental.

Na página 195, no capítulo 2, dedicado ao estudo de porcentagens é apresentada uma situação envolvendo o cálculo de um desconto, cuja resolução é realizada de diferentes formas, entre elas uma é por meio do cálculo mental. A situação é a seguinte: um tênis que custava R$ 200,00 está com desconto de 60%. Quanto representa, em reais, esse desconto? A seguir há a proposta de resolução do livro: sabemos que 60% corresponde a $6 \times 10\%$ e que calcular 10% de uma quantia é o mesmo que dividi-la por 10, pois $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Assim, para obter 60% de 200, basta calcular 10% desse valor e multiplicar o resultado por 6. Exemplo: $\frac{200}{10} = 20$ $20 \times 6 = 120$.

Inicialmente na página 196 há outra situação que envolve percentual de acréscimo, a situação apresentada é: Mário vai viajar e precisa comprar uma mala. Ele foi até uma loja e gostou de uma que custa R$ 380,00. O vendedor lhe informou que, se quisesse comprar a mala em prestações, o valor final seria 15% maior. Se Mário escolheu comprar a mala em prestações, quanto vai pagar por ela? Esse exercício é resolvido mentalmente. Forma de resolver adotada pelo livro: podemos resolver essa situação usando cálculo mental. Calcular 15% de um valor é o mesmo que calcular 10% desse valor, depois 5% desse valor e, então, adicionar as quantias obtidas. Assim, podemos resolver esse problema calculando inicialmente 10% de 380, pois sabemos que, para isso, basta dividir 380 por 10. Ao fazer essa divisão, obtemos 38 como resultado. Como o acréscimo é de 15%, falta calcular 5% de 380. Sabendo que 10% de 380 é 38, para determinar 5% de 380 basta dividir 38 por 2, obtendo 19 como resultado. Portanto, o valor total do acréscimo será de $38 + 19 = 57$. Adicionando o valor do acréscimo ao preço da mala, temos $57 + 380 = 437$.

Na página 198 há seguinte situação: Isaura juntou dinheiro para comprar um apartamento. Ela escolheu um apartamento que custa R$ $195.000{,}00$. Conversando com o corretor, ela conseguiu um desconto de 5% para o pagamento à vista. Considerando que Isaura escolha pagar à vista, quanto ela pagará pelo apartamento? Essa situação é resolvida mentalmente de maneira similar à de desconto citada acima. O manual do professor vem orientando que os alunos resolvam essa questão diferente da forma aderida pelo livro. Além disso, são dadas as seguintes dicas a respeito dessas questões (situações) ao docente: a estratégia de cálculo mental é, na maioria das vezes, pessoal. Apesar disso, é importante apresentar aos estudantes diversas possibilidades para que eles ampliem seu repertório. Já foi dito a eles que

calcular 10% de um valor é o mesmo que dividi-lo por 10. Verifique se eles percebem que, do mesmo modo, calcular 1% de um valor é o mesmo que dividi-lo por 100. Essa dica revela que, tal como está previsto pela BNCC, o livro busca promover a autonomia e senso crítico dos alunos mostrando flexibilidade no processo de resolução de um mesmo exercício. E por fim, na página 200, o exercício de número 3 sugere que os alunos efetuem mentalmente os exercícios de porcentagem. Exemplo: calcule mentalmente 10% de 20.000, 25% de 20.000.

Unidade 6, Circunferência, círculo e transformações geométricas:

Percorrendo a seção "circunferência e círculo", no tópico de atividades, é apresentado o exercício 24, que se encontra na página 224, ao qual é orientado que o aluno resolva esse exercício mentalmente: qual é a medida do setor circular que cabe exatamente duas vezes no círculo? E qual é a medida do setor circular que cabe exatamente cinco vezes no círculo? Percebe-se que essa atividade explora o cálculo mental a partir da relação entre a medida total e a quantidade de vezes que o setor circular se encaixa nele.

A análise realizada ao longo dessa obra evidencia que a habilidade de cálculo mental, apesar de estar presente em diferentes conteúdos matemáticos ao longo das unidades, não tem sua exploração de maneira explícita. Em linhas gerais, o cálculo realizado mentalmente não ocorre de maneira sistemática e contínua, em alguns casos a habilidade surge como uma possibilidade de resolução, ou ainda, como consequência natural da realização de determinadas atividades, e não propriamente como um objeto de ensino explorado diretamente.

A análise dessa obra evidencia que a habilidade de cálculo mental está inserida em diferentes eixos matemáticos, por exemplo integrado ao assunto de números, geometria, álgebra e porcentagem. Entre esses mencionados acima, o cálculo realizado mentalmente é mais explorado em porcentagem, sendo utilizado nesse processo como uma estratégia para facilitar e agilizar as resoluções dos exercícios e não como um método de aprendizagem isolado. Nesse sentido o manual do professor desempenha um papel fundamental no desenvolvimento e estímulo do cálculo mental, já que esse material surge como um complemento para o livro destinado aos alunos.

3.2.3 Análise do livro Geração Alpha do 8° ano

Unidade 4, Triângulos e quadriláteros:

A seção 1, referente a triângulos, possui o subtópico de atividades, que se encontra na página 98, na qual tem-se o exercício de número 1, que é solicitado explicitamente para que

seja calculado mentalmente. Exemplo: calcule mentalmente a maior medida inteira possível do lado de um triângulo, sabendo que os outros dois lados medem 4 cm e 6 cm.

Unidade 5, Sequências e proporcionalidade:

No início dessa unidade, página 132, no manual do professor, há a seção "sobre a unidade", que em linhas gerais faz uma apresentação dos conteúdos e dos objetivos da unidade, e nela consta que, no estudo da proporcionalidade, serão abordadas definições de razão e de proporção com base em situações do cotidiano, além da exploração do cálculo mental em situações envolvendo proporcionalidade para a construção do conhecimento sobre esse tema. Em contrapartida, não tem nada explícito sobre a abordagem dessa habilidade.

Unidade 8, Grandezas e medidas:

Nessa unidade, seção 2, destinada a volumes e capacidades, página 245, é exposto o exercício 3, que é orientado ao aluno que seja respondido por meio do cálculo mental a seguinte pergunta: se dobrarmos a medida da aresta de um cubo, quanto a medida do seu volume aumentará?

Embora essa obra possibilite que o aluno recorra ao cálculo de cabeça em algumas situações, há poucas propostas que estimulem diretamente a reflexão sobre os procedimentos utilizados e que fomentem o desenvolvimento dessa habilidade. Assim, sua abordagem é caracterizada como pouco estruturada, ou seja, o livro não organiza ou planeja atividades para desenvolver o cálculo mental de forma contínua.

3.2.4 Análise do livro Geração Alpha do 9° ano

Nesse livro não foram encontradas abordagens explicitamente nem implicitamente sobre cálculo mental. Evidencia-se assim, que à medida que os conteúdos se tornam mais difíceis o cálculo mental atua cada vez mais integrado aos procedimentos próprios de cada área da matemática. Nesse sentido o estudante encontra diversas oportunidades para realizar cálculos mentalmente, mas raramente é incentivado a de fato usar essa habilidade.

3.3 Conclusão das análises

Ao realizar a análise dos livros da coleção Geração Alpha, foi possível perceber que há uma diminuição gradual na exploração do cálculo mental pelos livros ao longo dos anos

escolares. Nos livros do sexto e sétimo ano ocorrem várias menções explícitas e implícitas no livro do aluno referente a essa habilidade. Além disso, o manual do professor complementa e incentiva a utilização desse recurso, fornecendo ao docente orientações complementares às propostas apresentadas no livro do aluno, bem como recomendações adicionais para a exploração do cálculo mental. Em contrapartida, no livro do oitavo ano há pouca ocorrência de questões e situações que envolvam o cálculo mental. No volume do nono ano essa habilidade não é sequer mencionada.

Embora a BNCC não estabeleça que o cálculo mental deva ser trabalhado de maneira isolada nos anos finais do ensino fundamental, o documento valoriza o uso de estratégias diversificadas de resolução, de estimativa da escolha de procedimentos e da autonomia dos estudantes na resolução de situações-problema. No entanto, há uma mudança nas abordagens dos livros do oitavo e nono ano, que pouco apresentam oportunidades para que o cálculo mental seja explorado e, consequentemente, não estimula que o aluno atue de forma autônoma, desenvolva e utilize suas estratégias próprias de resolução.

Nesse sentido, a ausência de atividades voltadas ao cálculo mental nesses últimos volumes representa uma oportunidade pedagógica não desenvolvida, na qual há diversos conteúdos como potenciação, radiciação, porcentagem entre outros que podem favorecem essa exploração.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, iniciamos com o capítulo de evolução dos números, com o objetivo central de mostrar que esse processo não acorreu de maneira isolada da sociedade, mas sim como uma forma de suprir as necessidades desta. O segundo capítulo de cálculo mental evidencia a definição do cálculo mental, bem como suas diferentes estratégias que facilitam na resolução de cálculos realizados mentalmente. E por fim é apresentado o último capítulo, que são as análises dos livros e o ponto chave dessa monografia.

O objetivo desse trabalho de analisar como o cálculo mental é abordado nos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental foi atingido. Em linhas gerais, os livros analisados apresentam uma proposta que contempla as orientações da BNCC, ao propõem situações que promovem a autonomia e a utilização de diferentes estratégias para resolver uma mesma situação-problema. Todavia, no que tange a cálculo mental, observa-se que sua abordagem ocorre na maioria das vezes, de forma desarticulada e implícita. Além disso, percebe-se que não há uma linearidade em relação a essa habilidade no decorrer dos anos observados.

O exemplo plausível disso é que no sexto e sétimos anos, são apresentadas propostas que propõem explicitamente ao discente a realização de cálculo mentalmente, isso aliado a atividades que valorizam a decomposição, a reorganização de parcelas e a comparação frente às diferentes estratégias. Já no oitavo e nonos anos, isso praticamente não acontece. Logo, considera-se que apesar de o cálculo mental ser mencionado nos livros sua abordagem aparece na maioria das vezes nas entrelinhas não sendo explorado assim por dizer de forma sistemática e contínua.

Para finalizar, a realização desse trabalho possui uma grande importância para o meu processo de formação acadêmica, pois ampliou meus horizontes na área da educação matemática, me permitindo trilhar novos caminhos e despertando a vontade de futuramente ingressar em um mestrado em educação matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Bourdenet, Gilles. (2007). Le calcul mental. *Activités mathématiques et scientifiques* (n.º 61, p. 5–32.). Strasbourg: IREM.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARVALHO, Renata. Calcular de cabeça ou com a cabeça? Encontros de professores de matemática. Actas do PROFMAT, 2011.

CONTI, Keli Cristina; NUNES, Lais Macedo de Almeida. Cálculo mental em questão: fundamentação teórica e reflexão. *Revemop*, Ouro Preto, v. 1, n. 3, p. 361-378, set./dez. 2019.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é a matemática*: uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Tradução de Alberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

FERREIRA, Jamil. *A construção dos números.* 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

GOMES, Sinesior. *Pré-história (6.000.000 – 3.500 a.C.).* 2017. Disponível em: https://sinesi-orgomes.blogspot.com/2017/08/pre-historia-6000000-3500-ac.html. Acesso em: 20 dez. 2025.

GUNDLACH, Bernard Henry. *Números e numerais.* Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1992.

IFRAH, Georges. *Os números*: a história de uma grande invenção. 4. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1981.

LIMA, Elon Lages. *Análise real*: função de uma variável. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. V. 1.

MORGADO, Augusto. C. et al. *Análise combinatória e probabilidade.* 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

OLIVEIRA, Edvaldo Fialho de. *A calculadora como ferramenta de aprendizagem*. 2011. Trabalho de Graduação (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2011.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino; FUGITA, Felipe. *Geração alpha matemática*: 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: SM Educação, 2022.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino; FUGITA, Felipe. *Geração alpha matemática*: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: SM Educação, 2022.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino; FUGITA, Felipe. *Geração alpha matemática*: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: SM Educação, 2022.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino; FUGITA, Felipe. *Geração alpha matemática*: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: SM Educação, 2022.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. *E-book*.

STRUIK, Dirk Jan. *História concisa das matemáticas.* Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

Carolaine Costa Morais

Cálculo mental nos anos finais do ensino fundamental: uma análise sobre sua abordagem em livros didáticos de matemática

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 13/08/2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Roque da Silva Lyrio (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Prof. Me. Marcelo de Araújo Lino
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 05 de agosto de 2026.

Documento assinado eletronicamente por **ROQUE DA SILVA LYRIO**, **Professor Efetivo**, em 16/08/2026, às 09:57, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **Diogo Soares Dorea da Silva**, **Professor Efetivo**, em 16/08/2026, às 11:48, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **MARCELO DE ARAUJO LINO**, **Professor Efetivo**, em 17/08/2026, às 05:31, conforme decreto nº 8.539/2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site http://sei.ifba.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&acao_origem=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **5017449** e o código CRC **3ADFC549**.