

Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia da Bahia - Campus Valença
Licenciatura em Matemática

Anderson Guilherme Nascimento dos Santos

Otimização do cultivo de banana por meio da Programação Linear

Valença-BA
2026

Anderson Guilherme Nascimento dos Santos

Otimização do cultivo de banana por meio da Programação Linear

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - *Campus* Valença como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Davis Magalhães de Freitas

Valença-BA
2026

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DO IFBA, COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

S237o Santos, Anderson Guilherme Nascimento dos

Otimização do cultivo de banana por meio da Programação Linear: / Anderson Guilherme Nascimento dos Santos; orientador Davis Magalhães de Freitas -- Valença : IFBA, 2026.

59f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal da Bahia, 2026.

1. Programação linear. 2. Pesquisa operacional aplicada para otimizar o cultivo de banana. 3. Matemática aplicada. I. Freitas, Davis Magalhães de, orient. II. TÍTULO.

CDD:519.72

"A Matemática é a arte de transformar necessidades reais em soluções ótimas."

Autor desconhecido.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me concedido força, sabedoria, saúde e perseverança para chegar até aqui. Nos momentos de dificuldade, foi minha fé que me deu forças para continuar e não desistir dos meus objetivos.

Agradeço à minha esposa, Giovanna, por todo amor, companheirismo, compreensão e apoio durante essa caminhada. Sua presença, incentivo e paciência foram fundamentais para que eu pudesse superar os desafios encontrados ao longo desta trajetória. Aos meus pais, Gene e Vânia, agradeço por todo amor, cuidado, ensinamentos e por sempre acreditarem em mim. Sou profundamente grato por tudo o que fizeram e continuam fazendo para me apoiar na realização dos meus sonhos.

Agradeço também ao Clube dos Farofeiros, pela amizade, pelos momentos compartilhados, pelas conversas, pela descontração e por todo apoio ao longo dessa caminhada. A presença de vocês tornou essa trajetória mais leve e especial.

Resumo

Este trabalho discute a programação linear que é uma importante ferramenta da Pesquisa operacional utilizada na otimização de alocação de recursos limitados. O trabalho inicia-se com a fundamentação teórica acerca da Programação Linear, abordando seus principais conceitos como modelo geral, formulações de modelos, região viável, conjunto convexo e pontos extremos, revelando então a base matemática que garante a validade dos métodos de resolução. Em seguida são apresentados os passos necessários que caracterizam a aplicação dos métodos gráfico e simplex. O trabalho utiliza da fundamentação da Programação Linear como apoio para resolução de problemas hipotéticos sobre cultivo de banana que necessitam de maximização de lucro com recursos limitados. Dessa forma, o trabalho demonstra a importante contribuição da modelagem matemática para auxiliar a tomada de decisões no setor agrícola.

Palavras-chave: Programação linear; Pesquisa operacional aplicada a otimizar o cultivo de banana; Matemática aplicada.

Abstract

This paper discusses linear programming, an important Operations Research tool used to optimize the allocation of limited resources. It begins by establishing the theoretical foundations of linear programming covering key concepts such as the general model, model formulation, the feasible region, convex sets, and extreme points thereby revealing the mathematical basis that ensures the validity of the solution methods. Next, the paper outlines the steps involved in applying the graphical and simplex methods. It then uses these linear programming principles to solve hypothetical problems regarding banana cultivation that require profit maximization under resource constraints. Thus, the study demonstrates the significant contribution of mathematical modeling to decision-making in the agricultural sector.

Keywords: Linear Programming; Operations research Applied to banana cultivation Optimization; Applied Mathematics..

Sumário

Motivação **1**

0 Introdução **2**

1 Programação Linear **4**

1.1 O que é Programação Linear 4

1.2 Conceitos básicos de Programação Linear 4

1.3 Modelo Geral 5

1.3.1 Forma Padrão 5

1.3.2 Forma Matricial 6

1.3.3 Forma Canônica 7

1.3.4 Transformação da formulação canônica para a padrão 7

2 Discussões sobre a Existência de Soluções **10**

2.1 Região Viável 10

2.2 Hiperplanos e Semiespaços 11

2.3 Conjuntos Convexos 12

2.4 Conjuntos Limitados 14

2.5 Compacidade 15

2.6 Pontos Extremos 15

2.7 Existência de Soluções Ótimas: o Teorema de Weierstrass 17

2.8 O Teorema Fundamental da Programação Linear 19

2.9 Classificação dos Problemas de Programação Linear 21

2.9.1 Problemas inviáveis 21

2.9.2 Problemas viáveis e limitados 22

2.9.3 Problemas ilimitados 22

2.9.4 Problemas com múltiplas soluções ótimas 23

2.9.5 Resumo 24

2.10 Solução pelo método gráfico 24

2.11 Método Simplex 30
2.11.1 Simplex Tabular 30

3 Modelagem e otimização do cultivo de Banana **40**
3.1 Formulação matemática do modelo 41
3.2 Problema de programação linear no contexto rural (Método Gráfico) . . . 41
3.2.1 Variáveis de decisão 42
3.2.2 Função objetivo 43
3.2.3 Restrições 43
3.2.4 Formulação final do modelo 44
3.2.5 Resolução do problema pelo método gráfico 44
3.3 Problema de programação linear no contexto rural (Método Simplex) . . . 48
3.3.1 Variáveis de decisão 49
3.3.2 Função objetivo 50
3.3.3 Restrições 50
3.3.4 Formulação final do modelo 51
3.3.5 Modelo na forma padrão 51
3.3.6 Solução básica inicial 51

4 Considerações Finais **58**

Referências **59**

Lista de Ilustrações

Figura 2.1 – Os vértices são os únicos pontos extremos do quadrado. 16
Figura 2.2 – Representação da região viável de um PPL e suas curvas de nível. . . . 25
Figura 2.3 – Variáveis de decisão como eixos das coordenadas 26
Figura 2.4 – $x_2 \geq 0$ 27
Figura 2.5 – $x_1 \geq 0$ 27
Figura 2.6 – $4x_1 + 3x_2 \leq 18$ 28
Figura 2.7 – $x_1 + 3x_2 < 6$ 28
Figura 2.8 – Região factível 29
Figura 2.9 – Principais passos do método simplex 31

Figura 3.1 – $x_1 \geq 0$ 45
Figura 3.2 – $x_2 > 0$ 45
Figura 3.3 – $2x_1 + 3x_2 < 75$ 46
Figura 3.4 – $x_1 + x_2 \leq 30$ 46
Figura 3.5 – $3x_1 + 4x_2 \leq 100$ 47
Figura 3.6 – Região factível 47

Lista de Tabelas

2.1 Classificação dos problemas de Programação Linear. 24
2.2 Solução básica inicial na forma tabular do simplex 33
2.3 Coluna Pivô 33
2.4 Linha pivô 34
2.5 Número pivô 34
2.6 Nova linha Pivô 35
2.7 Demais linhas 36
2.8 Segunda interação: coluna pivô 36
2.9 Segunda iteração: linha pivô 37
2.10 Segunda interação: número pivô 37
2.11 Segunda interação: número pivô 38
2.12 Segunda interação: demais linhas (solução ótima) 38

3.1 Primeira iteração: coluna pivô 52
3.2 Solução básica inicial na forma tabular do simplex 52
3.3 Primeira iteração: linha pivô 53
3.4 Primeira iteração: número pivô 53
3.5 Primeira iteração: nova linha pivô 54
3.6 Primeira iteração: demais pivô 54
3.7 Segunda iteração: coluna pivô 55
3.8 Segunda iteração: linha pivô 55
3.9 Segunda iteração: número pivô 55
3.10 Segunda iteração: nova linha número pivô 56
3.11 Segunda iteração: demais linhas (solução ótima) 56

Motivação

Nasci e fui criado numa pequena cidade chamada Teolândia, localidade que tem como uma das suas principais fontes de sustento é o cultivo e comercialização da banana. Observando que pequenos agricultores plantam a fruta e passam por adversidades durante todo o processo de cultivo, o que pode levar a grandes prejuízos, identifiquei a necessidade de utilizar a Matemática para propor a esses agricultores uma melhor forma de alcançar margens máximas de lucro.

Diante desse contexto, surgiu o interesse em investigar a Programação Linear (PL) e aplicá-la ao cultivo de banana. Tal proposta motivou a escolha desse tema para o desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso, com o propósito de analisar como técnicas de otimização podem contribuir para a melhoria da alocação de recursos e para a maximização dos resultados produtivos.

Capítulo 0

Introdução

A Pesquisa Operacional pode ser compreendida como a aplicação do método científico por meio de modelos matemáticos, técnicas estatísticas e algoritmos computacionais com o propósito de subsidiar a tomada de decisões. Nesse contexto, a área consolida-se como um campo essencialmente multidisciplinar, integrando conhecimentos de engenharia de produção, matemática aplicada, ciência da computação e gestão empresarial (BELFIORE; FÁVERO, 2013; HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

A Programação Linear é uma importante ferramenta da Pesquisa Operacional. Nesse contexto, o termo programação não está atribuído a programação de computadores, mas sim à organização e planejamento de atividades (ESTEVÃO, 1998).

A Programação Linear tem como principal propósito encontrar a melhor solução possível para situações problemas que podem ser expressos matematicamente por meio de modelos lineares. Obedecendo um sistema linear de restrições, o objetivo da Programação Linear é maximizar ou minimizar uma função linear. A depender do intuito do problema, tal função que é chamada de função objetivo (MARINS, 2011).

A Pesquisa Operacional consolidou-se como área científica durante a Segunda Guerra Mundial, quando equipes multidisciplinares compostas por matemáticos, físicos, engenheiros e militares passaram a utilizar métodos quantitativos para auxiliar o planejamento de operações estratégicas. Esses grupos tinham como objetivo analisar problemas complexos relacionados à alocação eficiente de recursos, logística, transporte, posicionamento de tropas e utilização de equipamentos militares, buscando identificar soluções que maximizassem a eficiência das operações em um contexto de recursos limitados. Após o término do conflito, as técnicas desenvolvidas foram adaptadas e difundidas em diversos setores civis, como indústria, agricultura, transportes, saúde e administração, contribuindo para o desenvolvimento da Pesquisa Operacional como um importante campo da Matemática Aplicada, como foi destacado em (HILLIER; LIEBERMAN, 2013)

Segundo (ALMEIDA, 2018), a programação linear tem importância considerável nos setores industriais, se tornado bastante útil em diversas áreas, como nas áreas de alimentos,

transportes, fábricas, agricultura, fluxo de redes entre outras.

De acordo com (Mais Agro; Syngenta, n.d) não há exatidão sobre a origem do cultivo de banana no Brasil, a principal hipótese é a de que a fruta chegou ao solo brasileiro através dos portugueses no período de colonização, mas existe uma outra versão segundo a qual os povos indígenas brasileiros já cultivavam banana nos anos antes de 1500. O Brasil é o quarto maior produtor de banana em todo o mundo, sendo que quase toda a sua comercialização é mantida em território nacional, exportando apenas 1% de toda a sua produção. Com isso, a banana se torna a fruta mais consumida pelos brasileiros (Mais Agro; Syngenta, n.d).

Observando a variedade e as especificidades de cada espécie de banana cultivada no Brasil, este trabalho tem como objetivo, por meio da Programação Linear, identificar as espécies mais adequadas para cultivo e comercialização, considerando diferentes situações hipotéticas e as condições específicas exigidas por cada espécie, de modo a determinar a combinação que possibilite a obtenção da maior margem de lucro.

O primeiro capítulo apresenta a fundamentação teórica e conceitual acerca da Programação Linear. No segundo capítulo, são abordadas definições e teoremas que fundamentam a existência de soluções, bem como os métodos utilizados na resolução de problemas de Programação Linear. Por fim, o terceiro capítulo apresenta a aplicação da Programação Linear ao problema proposto, considerando os diferentes cenários hipotéticos estabelecidos.

Capítulo 1

Programação Linear

Com o objetivo de consolidar uma base teórica acerca de Programação Linear, neste capítulo serão abordados os principais conceitos e definições sobre tal assunto, como também algumas demonstrações de teoremas que serão necessários no decorrer desse trabalho. É importante ressaltar que os resultados, definições e exemplos foram extraídos da obra de (BELFIORE; FÁVERO, 2013).

1.1 O que é Programação Linear

A Programação Linear é um ramo da Pesquisa Operacional que se dedica ao estudo de métodos matemáticos voltados à otimização de problemas que envolvem a alocação eficiente de recursos limitados. Esses problemas são caracterizados pela presença de uma função objetivo linear, a ser maximizada ou minimizada, sujeita a um conjunto de restrições lineares.

De acordo com BELFIORE e FÁVERO (2013), a Programação Linear é amplamente utilizada em áreas como indústria, transporte, agricultura, logística e economia, constituindo uma importante ferramenta de apoio à tomada de decisão. Ressalta-se que o termo programação não se refere à programação computacional, mas sim ao planejamento e à organização racional de ações (ESTEVAO, 1998).

1.2 Conceitos básicos de Programação Linear

Um problema de Programação Linear consiste, essencialmente, em determinar os valores de um conjunto de variáveis de decisão que otimizem uma função objetivo, respeitando um sistema de restrições.

As variáveis de decisão representam as quantidades que podem ser controladas no problema, como produção, área cultivada ou quantidade de recursos alocados. A fun-

ção objetivo expressa matematicamente o critério de otimização, enquanto as restrições traduzem as limitações impostas pelos recursos disponíveis.

1.3 Modelo Geral

A Programação Linear é um método de obtenção da maximização ou minimização de um problema linear, que por sua vez é expresso por uma função linear, dita como **função objetivo Z**, e por "melhor valor"nos referimos ao valor máximo ou mínimo da função, a depender do problema. As soluções que atendem as restrições e que dispõe do melhor valor para a função objetivo são chamadas de **soluções ótimas**.

Algebricamente o problema pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{max ou min } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeito a:} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 & \end{aligned}$$

sendo que:

- z é a função objetivo;
- x_j são as variáveis de decisão, principais ou controláveis, para $j = 1, 2, \ldots, n$;
- a_{ij} é a constante ou coeficiente da i-ésima restrição da j-ésima variável, para $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$;
- b_i é o termo independente ou quantidade de recursos disponíveis da i-ésima restrição, para $i = 1, 2, \ldots, m$;
- c_j é a constante ou coeficiente da j-ésima variável da função objetivo, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Na formulação geral de um problema de programação linear é possível apresente duas formas, forma padrão e forma canônica, nas subseções abaixo serão expostos as características de cada forma e os passos necessários para que haja mudança na forma do problema.

1.3.1 Forma Padrão

Dizemos que um modelo está em sua forma padrão se ele atende as seguintes condições:

- Todas as restrições devem ser representadas como equações lineares.
- As variáveis de decisão devem ser maiores ou iguais a zero.
- Os termos independentes devem ser maiores ou iguais a zero.

Matematicamente, a forma padrão pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{max ou min } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeito a:} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

1.3.2 Forma Matricial

Um problema de Programação Linear, estando ele na forma padrão, poderá ser expresso com estrutura matricial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{max ou min } Z = f(x) &= c^T x \\ \text{sujeito a:} \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ b &\geq 0 \end{aligned}$$

sendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

onde c^T representa a transposta da matriz c e $x \geq 0$ representa que $x_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots n$.

1.3.3 Forma Canônica

Em um modelo de programação linear na forma canônica, as restrições devem ser apresentadas na forma de inequações, podendo z ser uma função objetivo de maximização ou de minimização. Se a função z for de maximização, todas as restrições devem ser representadas com sinal do tipo $\leq$; se a função z for de minimização, as restrições devem estar com sinal do tipo $\geq$.

Para um problema de maximização, a forma canônica pode ser representada matematicamente como:

$$\begin{aligned} \max z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeito a:} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n & \end{aligned} \tag{1.1}$$

Já para um problema de minimização, a forma canônica passa a ser:

$$\begin{aligned} \min z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeito a:} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\geq b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n & \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.3.4 Transformação da formulação canônica para a padrão

Tendo um problema na forma canônica e querendo reescrevê-lo na forma padrão, é necessário examinar todas as restrições do problema. Estando ainda o problema na forma canônica, as restrições poderão ser dadas por inequações do tipo $\leq$ ou $\geq$.

1º caso: caso as restrições sejam dadas por inequações do tipo $\leq$ é preciso adicionar uma variável não negativa no lado esquerdo da inequação, que transformará a restrição numa equação. Tendo em vista essa situação, a variável adicionada é chamada de **variável de folga**.

Exemplo 1.1. *Transforme o problema a seguir na forma padrão.*

$$\begin{aligned} max\ z = f(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ sujeito\ a: \quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 320 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 580 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Solução: para cada restrição do tipo $\leq$ será adicionada uma variável não negativa à esquerda da inequação:

- $x_4 = 320 - (2x_1 + 2x_2 + 4x_3) \geq 0$.
- $x_5 = 580 - (3x_1 + 4x_2 + 5x_3) \geq 0$.

Tendo então:

- primeira restrição: $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 320$.
- segunda restrição: $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 = 580$.

Resultando em:

$$\begin{aligned} \max\ z = f(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 320 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 &= 580 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

A variável de folga representa a quantidade de recurso que sobra após o uso pelas variáveis de decisão. Ela indica a diferença entre o total disponível e o que foi efetivamente utilizado, mantendo o modelo matematicamente correto e de fácil interpretação.

Por exemplo, podendo ser usado até 320 unidades de um recurso e sendo utiliza uma quantidade menor que esse total expressa por $2x_1 + 2x_2 + 4x_3$, a variável de folga x_4 representa exatamente o quanto desse recurso não foi utilizado.

2º caso: similarmente acontece com as inequações dadas por $\geq$, porém, nas restrições desse tipo é necessário subtrair uma variável que nesses casos é dita como **variável de excesso** transformando asssim as restrições em equações.

Exemplo 1.2. *Transforme o problema a seguir na forma padrão.*

$$\begin{aligned} max\ z = f(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ sujeito\ a: \quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 320 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\geq 580 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Solução: para cada restrição do tipo $\geq$ será subtraída uma variável não negativa à esquerda da inequação:

- $x_4 = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 320 \geq 0$.
- $x_5 = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 580 \geq 0$.

Tendo então:

- Primeira restrição: $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 320$.
- Segunda restrição: $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_5 = 580$.

Resultando em:

$$\begin{aligned} \max\ z = f(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 320 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_5 &= 580 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

A variável de excesso representa a quantidade que ultrapassa o limite mínimo estabelecido por uma restrição. Ela indica o quanto o valor obtido pelas variáveis de decisão é maior do que o exigido pelo modelo.

Por exemplo, quando uma restrição estabelece a necessidade de pelo menos 580 unidades de um recurso, e a expressão $3x_1 + 4x_2 + 5x_3$ resulta em um valor superior a esse mínimo, a variável de excesso x_5 representa exatamente a quantidade que excede esse limite.

Capítulo 2

Discussões sobre a Existência de Soluções

Apresentado os problemas de Programação Linear é natural que surja uma questão fundamental:

Quando um problema de Programação Linear admite solução ótima?

A resposta para essa pergunta está diretamente relacionada às propriedades geométricas da região viável. De fato, o estudo da Programação Linear fundamenta-se na teoria dos conjuntos convexos.

Neste capítulo serão apresentados os principais resultados que garantem a existência de soluções ótimas. Em particular, demonstraremos que, sempre que uma solução ótima existir, ela poderá ser encontrada em um ponto extremo da região viável. Esse resultado constitui o fundamento matemático do Método Simplex.

Ao longo deste capítulo serão utilizados resultados de Álgebra Linear, Geometria Convexa e Análise Matemática.

2.1 Região Viável

Considere o problema

$$\max Z = f(x) = c^T x$$

$$\text{sujeito a:} \quad Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Definição 2.1. *O conjunto*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \ e \ x \geq 0\}$$

é denominado ***região viável*** *ou* ***região factível*** *do problema.*
Cada elemento de P recebe o nome de solução viável ou solução factível.

Ou seja, uma solução viável ou factível é aquela que satisfaz todas as restrições do modelo, inclusive as de não negatividade. Naturalmente, podem ocorrer três situações distintas.

1. O sistema é incompatível. Nesse caso, $P = \emptyset$. Dizemos que o problema é **inviável**.
2. O sistema admite solução única. Nesse caso, $P \neq \emptyset$.
3. O sistema possui infinitas soluções. Essa é a situação mais frequente em Programação Linear.

Definição 2.2. *Solução ótima é a solução factível que apresenta o melhor valor da função objetivo.*

Nas próximas seções detalharemos algumas propriedades destas regiões.

2.2 Hiperplanos e Semiespaços

Antes de introduzir as primeiras proposições, introduziremos o conceito de hiperplano e semispaços, que são alguns objetos geométricos fundamentais para nossa análise geométrica do problema.

Definição 2.3. *Sejam $a \in \mathbb{R}^n$, com $a \neq 0$, e $b \in \mathbb{R}$. O conjunto*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b\}$$

*é denominado **hiperplano**.*

Exemplo 2.1. *Pontos são hiperplanos em $\mathbb{R}$, retas são hiperplanos em $\mathbb{R}^2$ e planos são hiperplanos em $\mathbb{R}^3$.*

Geometricamente, um hiperplano divide o espaço em duas regiões, os conjuntos

$$H^- = \{x : a^T x \leq b\} = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b\}$$

e

$$H^+ = \{x : a^T x \geq b\} = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b\}$$

que são chamados de **semiespaços fechados** determinados pelo hiperplano H.

Percebam que já definimos os semiespaços chamando-os de fechados, pois não é difícil intuir que uma sequência convergentes de pontos que satisfazem a desigualdade, terá limite que também satisfaz a desigualdade. Podemos provar também da seguinte maneira.

Proposição 2.1. *Todo semiespaço fechado é um conjunto fechado.*

Demonstração. Considere o semiespaço

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}.$$

Definindo a função

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = a^T x.$$

Que, por ser linear, é contínua. Além disso, o intervalo

$$(-\infty, b]$$

é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$. Observa-se que

$$H^- = f^{-1}\big((-\infty, b]\big).$$

Como a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua é um conjunto fechado, segue que H^- é fechado.
O caso do semiespaço

$$H^+ = \{x : a^T x \geq b\}$$

é completamente análogo, pois

$$[b, \infty)$$

também é um conjunto fechado.
Logo, todo semiespaço fechado é um conjunto fechado.

□

2.3 Conjuntos Convexos

O conceito de convexidade é um dos pilares da Programação Linear. Intuitivamente, um conjunto é convexo quando, dados dois pontos quaisquer pertencentes ao conjunto, todo o segmento de reta que os une permanece inteiramente contido no conjunto.

Definição 2.4 (Combinação Convexa)**.** *Sejam $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Uma combinação da forma*

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

é chamada de ***combinação convexa*** *dos pontos x_i quando λ_i os coeficientes escalares satisfazem*

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_i \leq 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1. \end{cases}$$

Observe que, para dois pontos x e y o conjunto

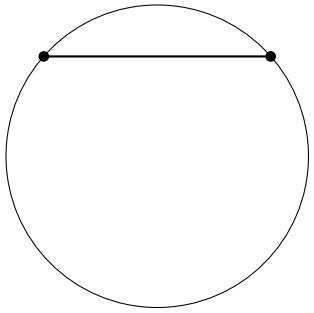
$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

representa todos os pontos pertencentes ao segmento de reta que liga x a y.

Definição 2.5. *(Conjuntos convexos) Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando, dados dois pontos $x_1, x_2 \in D$, então o ponto genérico $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in D$ para cada $\lambda \in [0, 1]$.*

São exemplos de conjuntos convexos: retas, planos, segmentos, bolas, cubos, polígonos regulares, semiespaços.

Por outro lado, uma circunferência não é um conjunto convexo. De fato, escolhendo dois pontos distintos sobre a circunferência, o segmento de reta que os une possui pontos pertencentes ao interior do círculo, os quais não pertencem à circunferência.



A circunferência não é convexa.

Agora, demonstraremos algumas propriedades fundamentais dos conjuntos convexos.

Teorema 2.1. *Todo semiespaço fechado é um conjunto convexo.*

Demonstração. Considere o semiespaço

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}.$$

Sejam $x, y \in H$, então,

$$a^T x \leq b \quad \text{e} \quad a^T y \leq b.$$

Seja agora $0 \leq \lambda \leq 1$. Como o produto interno é linear,

$$a^T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda a^T x + (1 - \lambda)a^T y \leq \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Logo, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in H$. Conclui-se que H é convexo.

□

O resultado anterior possui enorme importância, pois todas as restrições de Programação Linear definem semiespaços. Consequentemente, para compreender a geometria da região viável é necessário estudar a interseção desses conjuntos.

Proposição 2.2. *A interseção arbitrária de conjuntos convexos é um conjunto convexo.*

Demonstração. Considere uma família de conjuntos convexos $\{C_i\}_{i\in I}$ e seja

$$C = \bigcap_{i\in I} C_i.$$

Para quaisquer $x, y \in C$, como $x, y \in C_i$ para todo índice i, segue da convexidade de cada conjunto que

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C_i,$$

para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Como isso ocorre para todo índice,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{i\in I} C_i = C.$$

Portanto, C é convexo.

□

As duas proposições acima possuem uma consequência imediata e extremamente importante para a Programação Linear, apresentada na próxima seção.

2.4 Conjuntos Limitados

O conceito de limitação desempenha papel central na teoria da otimização.

Definição 2.6. *Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado quando existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$||x|| \leq M, \qquad \forall x \in C.$$

Intuitivamente, um conjunto limitado pode ser completamente contido no interior de uma esfera de raio finito.

Exemplo 2.2. *O quadrado*

$$[-1, 1]^2$$

é limitado.
O conjunto

$$\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

não é limitado.

2.5 Compacidade

Para demonstrar a existência de soluções ótimas recorreremos a um importante resultado da Análise Matemática.

Definição 2.7. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é denominado compacto quando toda sequência de pontos de K possui uma subsequência convergente cujo limite pertence ao próprio conjunto.*

Essa definição, embora conceitualmente importante, nem sempre é a mais conveniente para aplicações em Programação Linear.
Felizmente, em espaços euclidianos existe uma caracterização extremamente simples.

Teorema 2.2 (Heine–Borel)**.** *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

A demonstração completa desse resultado pertence ao contexto da Análise Real e pode ser encontrada, por exemplo, em Lima (2002).
Neste texto utilizaremos o Teorema de Heine–Borel como resultado conhecido.

Teorema 2.3. *Se a região viável de um Problema de Programação Linear é limitada então ela é compacta.*

Demonstração. Seja $P = \{x : Ax \leq b\}$ uma região viável. Como cada desigualdade

$$a_i^T x \leq b_i$$

define um semiespaço fechado, segue que o poliedro é interseção finita de conjuntos fechados e portanto, P é fechado.
Como, por hipótese, trata-se de uma região limitada, usando o Teorema de Heine–Borel, P é compacto.

□

O teorema anterior possui importância fundamental, a partir dele será possível aplicar o Teorema de Weierstrass às funções lineares, obtendo condições suficientes para a existência de soluções ótimas.

Na próxima seção introduziremos os conceitos de pontos extremos e demonstraremos que toda solução ótima de um problema de Programação Linear pode ser escolhida em um ponto extremo da região viável.

2.6 Pontos Extremos

Os conceitos apresentados nas seções anteriores nos permitem introduzir uma das noções mais importantes da Geometria Convexa e da Programação Linear: os pontos extremos.

Intuitivamente, um ponto extremo corresponde a um ponto de um conjunto convexo que não pode ser obtido como ponto interno de um segmento de reta cujas extremidades pertençam ao próprio conjunto.

Nos problemas de Programação Linear, os pontos extremos correspondem, geometricamente, aos vértices da região viável. Conforme veremos posteriormente, a existência desses pontos é fundamental para o desenvolvimento do Método Simplex.

Definição 2.8 (Vértice ou Ponto extremo)**.** *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Um ponto $x \in C$ é denominado* ***ponto extremo*** *de C quando não existem pontos distintos $y, z \in C$ e um escalar $0 < \lambda < 1$ tais que*

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Equivalentemente, sempre que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

com $y, z \in C$, necessariamente

$$y = z = x.$$

Em outras palavras, um ponto extremo não pode ser escrito como combinação convexa própria de outros dois pontos distintos do conjunto.

Exemplo 2.3. *Considere o intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, os únicos pontos extremos são 0 e 1, qualquer ponto $x \in (0, 1)$ pode ser escrito como*

$$x = (1 - x) \cdot 0 + x \cdot 1,$$

mostrando que não é extremo.
Considere o quadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Os quatro vértices

$$(0, 0),\ (1, 0),\ (0, 1),\ (1, 1)$$

são os únicos pontos extremos. Todo ponto pertencente ao interior do quadrado pode ser escrito como combinação convexa de dois ou mais pontos distintos do próprio quadrado.

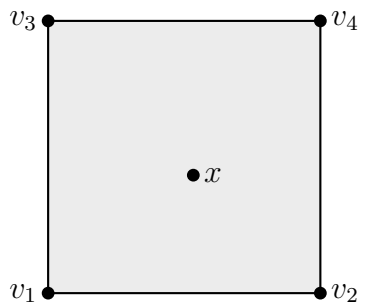


Figura 2.1: Os vértices são os únicos pontos extremos do quadrado.

Proposição 2.3. *Todo ponto interior de um conjunto convexo não é extremo.*

Demonstração. Seja x um ponto interior de C. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon) \subset C.$$

Escolha qualquer vetor não nulo d com $||d|| < \varepsilon$. Então,

$$x + d \in C, \qquad x - d \in C.$$

Além disso,

$$x = \frac{1}{2}(x + d) + \frac{1}{2}(x - d).$$

Como

$$x + d \neq x - d,$$

segue que x não pode ser extremo.

□

O resultado anterior mostra que os pontos extremos localizam-se necessariamente na fronteira do conjunto. Entretanto, nem todo ponto da fronteira é extremo.

Exemplo 2.4. *Considere o disco unitário*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}.$$

Todos os pontos da circunferência

$$||x|| = 1$$

são pontos extremos. Por outro lado, considere o conjunto

$$S = [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Os únicos pontos extremos são

$$(0, 0) \quad e \quad (1, 0).$$

Os demais pontos pertencem à fronteira, mas não são extremos.

2.7 Existência de Soluções Ótimas: o Teorema de Weierstrass

Até o momento desenvolvemos toda a estrutura geométrica da região viável. Entretanto, ainda permanece uma questão fundamental.

Quando podemos garantir que um problema de Programação Linear possui solução ótima?

A resposta será obtida a partir de um resultado clássico da Análise Real, conhecido como Teorema de Weierstrass.
Antes de apresentar o teorema, recordemos alguns conceitos.

Definição 2.9. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ atinge um* ***máximo absoluto*** *em $x^* \in A$ quando*

$$f(x) \leq f(x^*), \qquad \forall x \in A.$$

Analogamente, x^* é um ***mínimo absoluto*** *quando*

$$f(x) \geq f(x^*), \qquad \forall x \in A.$$

No contexto da Programação Linear, a função objetivo

$$f(x) = c^T x$$

é uma função linear e, portanto, contínua. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Lima (2002).

Estamos agora em condições de enunciar um dos resultados fundamentais da Análise, que não será demonstrado nesse texto, mas também pode ser encontrado em Lima (2002).

Teorema 2.4 (Weierstrass)**.** *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Se*

$$f : K \to \mathbb{R}$$

é contínua, então f atinge um máximo absoluto e um mínimo absoluto em K.
Em outras palavras, existem pontos

$$x_{\max}, x_{\min} \in K$$

tais que

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}), \qquad \forall x \in K.$$

O Teorema de Weierstrass é um dos pilares da Análise Matemática e garante que funções contínuas não apenas possuem supremo e ínfimo em conjuntos compactos, mas que esses valores são efetivamente atingidos.

Corolário 2.1. *Se $Z = c^T x$ é uma função objetivo e P, sua região viável, é limitada, então existe pelo menos uma solução ótima para o problema*

$$\max\{Z = c^T x : x \in P\}.$$

Demonstração. Se a régião for limitada, então ela será compacta. Além disso, a função $Z = c^T x$ é contínua. Aplicando o Teorema de Weierstrass, concluímos que Z atinge seu valor máximo em algum ponto de P. Logo, o problema admite solução ótima.

□

Observe que a hipótese de compacidade é essencial. Caso a região viável seja ilimitada, uma solução ótima pode deixar de existir.

Exemplo 2.5. *Considere o problema*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

A região viável é $[0, \infty)$*. Como* x_1 *pode crescer indefinidamente, não existe solução ótima.*

A inexistência de solução ótima em regiões ilimitadas não é uma consequência da falta de continuidade da função objetivo, mas sim da ausência de compacidade da região viável. Essa observação será fundamental para o Teorema Fundamental da Programação Linear, apresentado na próxima seção.

2.8 O Teorema Fundamental da Programação Linear

Os resultados desenvolvidos nas seções anteriores permitem demonstrar que, sempre que um problema de Programação Linear admite solução ótima, existe uma solução ótima que corresponde a um ponto extremo da região viável.

Essa propriedade constitui o fundamento matemático do Método Simplex, pois mostra que não é necessário procurar a solução ótima em todos os pontos da região viável, bastando examinar seus vértices.

Teorema 2.5 (Teorema Fundamental da Programação Linear)**.** *Considere o problema*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c^T x \\ \textit{sujeito a} \quad & x \in P = \{x : Ax \leq b \ e \ x \geq 0\}, \end{aligned}$$

onde $P \subset \mathbb{R}^n$ *é um uma região limitada, não vazia.*
Então existe pelo menos uma solução ótima.
Além disso, existe uma solução ótima que é um ponto extremo de P*.*

Demonstração. Como P é uma região compacta e a função objetivo

$$f(x) = c^T x$$

é linear e, portanto, contínua. Pelo Teorema de Weierstrass, existe um ponto

$$x^* \in P$$

tal que

$$c^T x \leq c^T x^*, \qquad \forall x \in P.$$

Logo, o problema possui solução ótima.

Resta mostrar que existe uma solução ótima que seja um ponto extremo. Se x^* já for um ponto extremo, não há nada a demonstrar.

Suponha então que x^* não seja extremo. Existe um número finito de pontos extremos que denotamos por $v_1, v_2, \ldots, v_k$ e o Teorema de Minkowski diz que x^* pode ser escrito como combinação convexa de pontos extremos (provado em, Schrijver (1986)), isto é,

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Aplicando a função objetivo, obtemos

$$c^T x^* = c^T \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \right).$$

Seja então v_j o ponto extremo, que possui o maior valor da função entra os pontos extremos, ou seja, $c^T v_j \geq c^T v_i$, para todo $i = 1, \ldots k$. Então,

$$\begin{aligned} c^T x^* &= c^T \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v_j \\ &= c^T v_j \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \\ &= c^T v_j. \end{aligned}$$

Temos então $c^T x^* \leq c^T v_j$. Como $c^T x^* \geq c^T v_j$, assim,o ponto extremo v_j também é solução ótima.

□

O teorema anterior possui enorme importância prática. Embora a região viável contenha, em geral, infinitos pontos, basta examinar seus pontos extremos para localizar uma solução ótima.

Esse fato reduz drasticamente o esforço computacional necessário para resolver problemas de Programação Linear.

Corolário 2.2. *Se a região viável possui um número finito de pontos extremos, então o valor ótimo do problema coincide com o maior valor da função objetivo calculado nesses pontos.*

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental da Programação Linear, existe uma solução ótima em um ponto extremo. Assim, basta comparar os valores da função objetivo em todos os pontos extremos. O maior desses valores será o valor ótimo do problema.

□

O corolário anterior constitui a justificativa matemática do Método Simplex. Em vez de procurar a solução ótima em todos os pontos da região viável, o algoritmo percorre sucessivamente soluções básicas viáveis adjacentes, aumentando o valor da função objetivo até atingir uma solução ótima.

2.9 Classificação dos Problemas de Programação Linear

Ao longo deste capítulo desenvolvemos os fundamentos geométricos da Programação Linear e demonstramos que, quando a região viável é limitada, uma solução ótima pode sempre ser encontrada em um ponto extremo.

Entretanto, nem todo problema de Programação Linear admite solução ótima. Dependendo da geometria da região viável e do comportamento da função objetivo, diferentes situações podem ocorrer.

Nesta seção apresentamos uma classificação completa dos problemas de Programação Linear.

Considere o problema

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \leq b. \end{aligned}$$

Seja

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \text{ e } x \geq 0\}$$

a região viável.

2.9.1 Problemas inviáveis

Definição 2.10. *Um problema de Programação Linear é denominado* ***inviável*** *quando*

$$P = \varnothing.$$

Isto é, não existe nenhum ponto que satisfaça simultaneamente todas as restrições.

Nesse caso, não existe solução admissível e, consequentemente, não faz sentido falar em solução ótima.

Exemplo 2.6. *Considere*

$$x \geq 3,$$
$$x \leq 1.$$

Não existe número real que satisfaça ambas as desigualdades.
Logo, a região viável é vazia.

Proposição 2.4. *Se $P = \varnothing$, então o problema não possui solução ótima.*

Demonstração. Uma solução ótima deve, necessariamente, pertencer à região viável. Como $P = \varnothing$, não existe sequer uma solução viável. Logo, não existe solução ótima.

□

2.9.2 Problemas viáveis e limitados

Definição 2.11. *Um problema é denominado **viável e limitado** quando*

$$P \neq \varnothing$$

e P é limitado.

Como todo poliedro limitado é compacto, segue imediatamente do Teorema Fundamental da Programação Linear que esse problema admite solução ótima.

Teorema 2.6. *Se P é uma região viável, limitada e não vazia, então existe pelo menos uma solução ótima. Além disso, existe uma solução ótima em um ponto extremo.*

Esse resultado já foi provado pelo Teorema Fundamental da Programação Linear e esse é o caso tratado pelo Método Simplex.

2.9.3 Problemas ilimitados

Um problema também pode possuir região viável não vazia e, ainda assim, não possuir solução ótima.
Isso ocorre quando a função objetivo pode crescer indefinidamente ao longo da região viável.

Definição 2.12. *Um problema é denominado **ilimitado** quando*

$$P \neq \varnothing$$

e para todo número real M, existe $x \in P$ tal que

$$c^T x > M.$$

Exemplo 2.7. *Considere*

$$\begin{aligned} \max \quad & x \\ \textit{sujeito a} \quad & x \geq 0. \end{aligned}$$

Como x pode crescer indefinidamente, não existe solução ótima.

A inexistência da solução ótima decorre da falta de limitação da região viável na direção de crescimento da função objetivo.

2.9.4 Problemas com múltiplas soluções ótimas

Também pode ocorrer que dois ou mais pontos distintos forneçam exatamente o mesmo valor ótimo.

Definição 2.13. *Um problema possui **múltiplas soluções ótimas** quando existem*

$$x, y \in P, \qquad x \neq y,$$

tais que

$$c^T x = c^T y$$

e esse valor é ótimo.

Teorema 2.7. *Se dois pontos distintos x, y são soluções ótimas, então todo ponto do segmento*

$$[x, y]$$

também é solução ótima.

Demonstração. Seja

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Como P é convexo, segue que $z \in P$.
Além disso, pela linearidade da função objetivo,

$$c^T z = c^T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda c^T x + (1 - \lambda)c^T y.$$

Como

$$c^T x = c^T y,$$

obtemos

$$c^T z = c^T x.$$

Logo, todo ponto do segmento também é ótimo.

□

O resultado anterior mostra que, o conjunto das soluções ótimas é um conjunto convexo, isto significa que quando existem duas soluções ótimas distintas, existe, na realidade, uma infinidade de soluções ótimas.
Geometricamente, isso significa que a função objetivo é paralela a uma face da região viável.

2.9.5 Resumo

Os resultados desta seção podem ser resumidos na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Classificação dos problemas de Programação Linear.

Situação	**Região Viável**	**Conclusão**
Inviável	Vazia	Não existe solução ótima.
Viável e limitada	Compacta	Existe solução ótima em um ponto extremo.
Viável e ilimitada	Não vazia e ilimitada	Pode existir ou não solução ótima; se a função objetivo cresce indefinidamente, o problema é ilimitado.
Múltiplas soluções	Existe uma face ótima	Todo ponto dessa face é solução ótima.

Concluímos, assim, a fundamentação teórica da Programação Linear. Os resultados obtidos neste capítulo demonstram que a busca por soluções ótimas pode ser restringida aos pontos extremos da região viável, os quais correspondem exatamente às soluções básicas viáveis.

Na seção seguinte utilizaremos essa caracterização para desenvolver o Método Simplex, algoritmo que percorre sucessivamente soluções básicas viáveis adjacentes até encontrar uma solução ótima ou detectar que o problema é inviável ou ilimitado.

2.10 Solução pelo método gráfico

Conforme o próprio nome sugere, solução gráfica é um método da programação linear em que por meio de expressões gráficas, é encontrada a região que satisfaz todas a restrições do problema.

Para problemas mais simples de programação linear, especialmente aqueles com apenas duas variáveis de decisão, é possível utilizar o método gráfico para encontrar a solução. Esse método é mais comum em situações bidimensionais, mas também pode ser aplicado a problemas com três variáveis, mesmo que haja uma complexidade maior, já que a análise

ocorre em um espaço tridimensional. Por outro lado, quando há quatro ou mais variáveis, o método gráfico deixa de ser viável devido à impossibilidade de representação visual adequada por meio de graficos. Que poderia ser enunciada como o seguinte caso:

Teorema 2.8. *Em um Problema de Programação Linear com duas variáveis se a região viável de um é não-vazia e limitada, então a função-objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo; contudo, se atingir um máximo ou um mínimo, este ocorrerá em pontos extremos.*

Demonstração. A Figura 2.2 sugere a ideia por trás da prova do Teorema. Como a função objetivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ de um PPL é uma função linear de x_1 e x_2, as suas curvas de níveis (curvas ao longo das quais z tem valor constante) são retas. À medida que se deslocam perpendicularmente a essas retas, a função-objetivo cresce ou decresce monotonicamente. Dentro de uma região viável limitada, os valores máximos e mínimos de z devem ocorrer, portanto, nos pontos extremos, como indica a Figura 2.2.

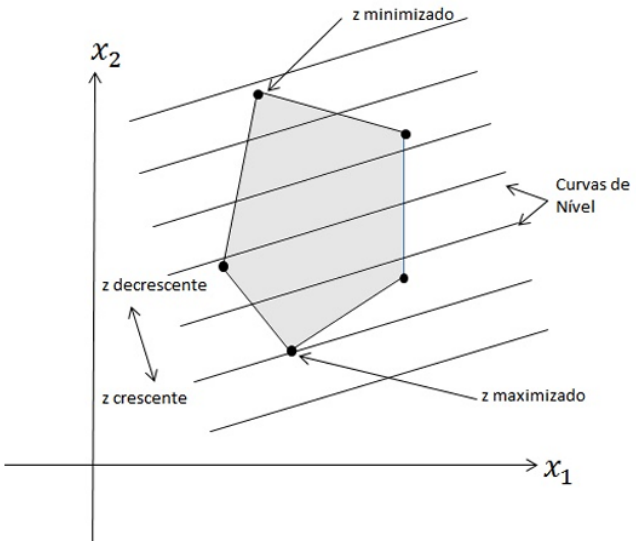


Figura 2.2: Representação da região viável de um PPL e suas curvas de nível.

□

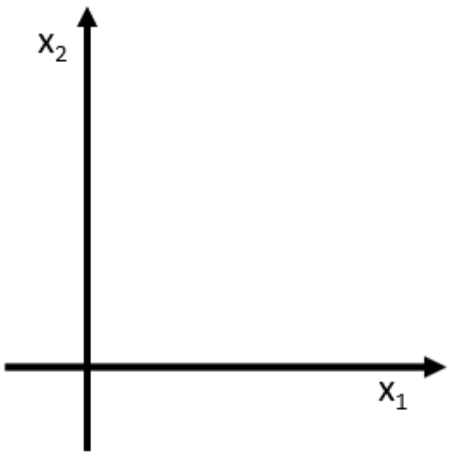
Para melhor compreensão, serão apresentados, por meio de um exemplo, os passos necessários para a resolução de um problema PL, com o objetivo de obter uma solução viável.

Exemplo 2.8. *Encontre a região factível do problema a seguir:*

$$\begin{aligned} max\ z = 5x_1 + 2x_2 \\ sujeito\ a: \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solução: O primeiro passo é associar os eixos do plano cartesiano com as variáveis de decisão, como mostra a figura abaixo:

Figura 2.3: Variáveis de decisão como eixos das coordenadas



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

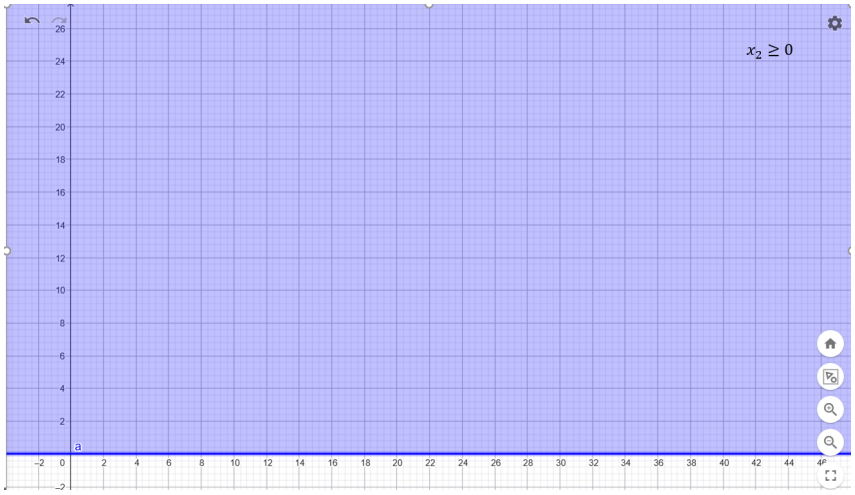
O próximo passo é delimitar a região do plano em que satisfaz todas as limitações da questão. Para isso, é necessário fazer uma análise individual de todas as restrições, para então obter a região viável.

Não há uma ordem específica para realizar uma análise gráfica de cada restrição, podemos começar pelas restrições de não negatividade das variáveis de decisão, conforme as figuras 2.4 e 2.5. Vale ressaltar que a área destacada em azul será a região em que as restrições serão satisfeitas:

1ª restrição:

Para $x_2 \geq 0$, a região que satisfaz a limitação será o eixo das abcissas e toda a sua parte superior.

Figura 2.4: $x_2 \geq 0$

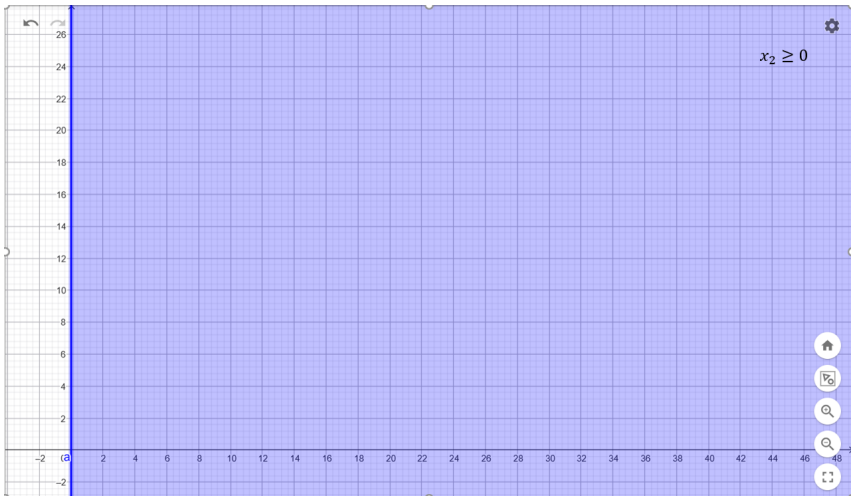


Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

2ª restrição:

Para $x_1 \geq 0$, a região que satisfaz a limitação será o eixo das ordenadas e toda a sua parte direita.

Figura 2.5: $x_1 \geq 0$

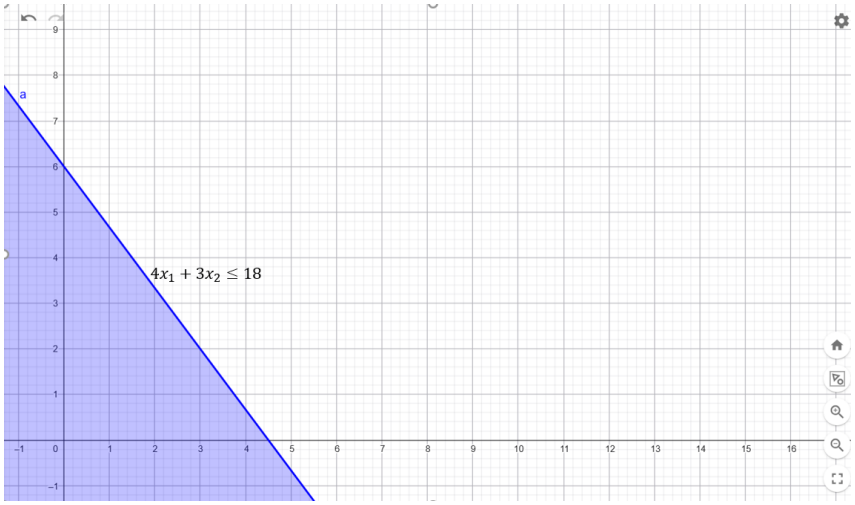


Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

3ª restrição:

Para determinar a região de $4x_1 + 3x_2 \leq 18$ é necessário expressar a reta que define a equação $4x_1 + 3x_2 = 18$. Como a soma da da expressão $4x_1 + 3x_2$ não pode ultrapassar 18, então toda a região abaixo da reta contém pares ordenados (x_1, x_2) os quais satisfazem a inequação $4x_1 + 3x_2 \leq 18$.

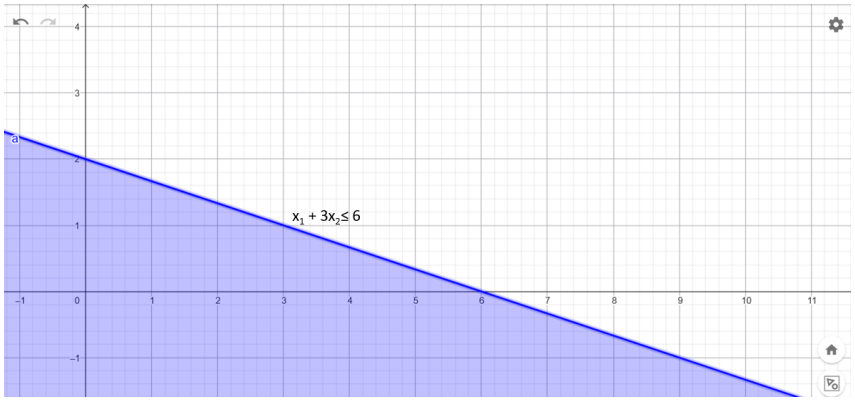
Figura 2.6: $4x_1 + 3x_2 \leq 18$



Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

4ª restrição:

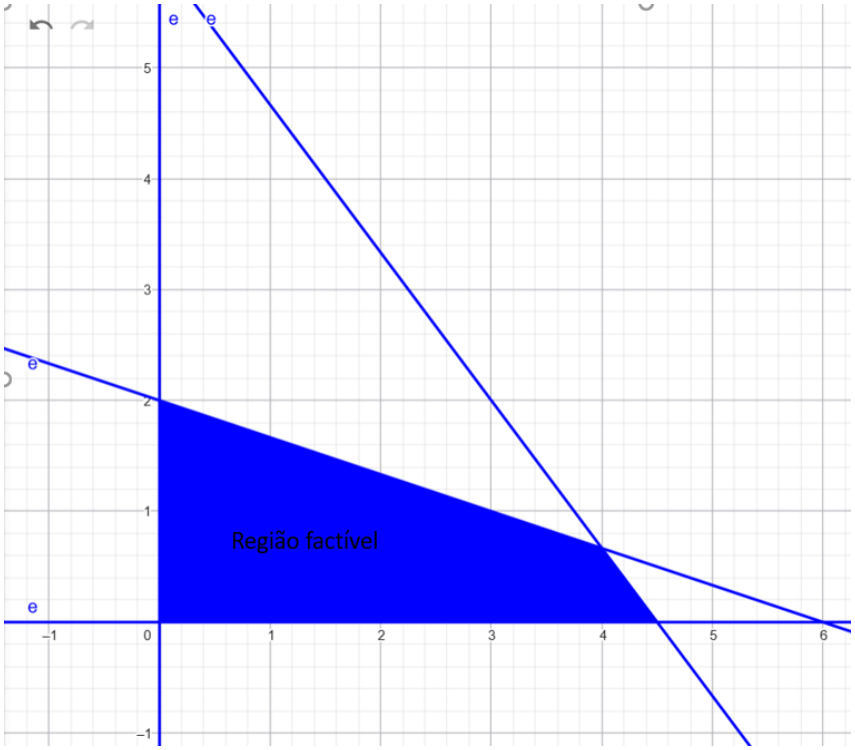
Figura 2.7: $x_1 + 3x_2 \leq 6$



Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

Todas as restrições devem ser representadas no mesmo gráfico. A interseção entre essas restrições e os eixos coordenados dá origem a uma região convexa que contém o conjunto de soluções possíveis para o problema,que nada mais é do que a região **viável** ou **factível**. A figura abaixo que ilustra um polígono em azul é a área factível demilitada pelo pares ordenados $(0, 0), (0, 2), (4, \frac{2}{3}), (\frac{9}{2}, 0)$.

Figura 2.8: Região factível



Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

Testaremos os pontos $(0,0), (0,2), (4,\frac{2}{3}), (\frac{9}{2},0)$ para concluir qual será o candidato para maximizar a função $z = 5x_1 + 2x_2$:

Para $(0,0)$:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \Rightarrow Z = 0 \tag{2.1}$$

Para $(0,2)$:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \Rightarrow Z = 5.0 + 2.2 \Rightarrow Z = 4 \tag{2.2}$$

Para $(4,\frac{2}{3})$:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \Rightarrow Z = 5 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{3} \Rightarrow \ Z \approx 21,333\ldots \tag{2.3}$$

Para $(\frac{9}{2},0)$:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \Rightarrow Z = 5 \cdot \frac{9}{2} + 0 = \frac{45}{2} \Rightarrow Z = 22,5 \tag{2.4}$$

Analisando a aplicação dos pontos extremos na função objetivo, conclui-se que o ponto $(\frac{9}{2},0)$ é o par ordenado em que a função é maximizada.

2.11 Método Simplex

Como visto na seção anterior, o método gráfico se faz eficiente para solucionar problemas de programação linear com duas variáveis, podendo até ser usado para problemas com três variáveis, que terá um grande nível de complexidade por ser necessário o esboço de gráficos tridimensionais. Com isso, o método simplex surge para solucionar qualquer problema, independente da quantidade de variáveis.

Antes de entender o que é o método simplex, é importante saber o que é um algoritmo. De forma geral, algoritmo é um conjunto de instruções e regras organizadas em um número finito de etapas, destinadas à solução de um problema que segue uma sequência lógica (OLIVEIRA, 2021).

O método simplex é um algoritmo caracterizado por um processo algébrico que começa com uma solução inicial possível e, passo a passo, encontra soluções melhores para um problema, até chegar à solução ótima. Para organizar os cálculos realizados durante cada iteração, utiliza-se a forma tabular do método, denominada tableau simplex ou simplex tabular, na qual os coeficientes das restrições e da função objetivo são dispostos em uma tabela que facilita a identificação das variáveis básicas, das variáveis não básicas e das operações necessárias para a evolução do algoritmo.

2.11.1 Simplex Tabular

O método Simplex fundamenta-se nos conceitos de base, variáveis básicas e variáveis não básicas. A base consiste no conjunto de variáveis cujas colunas, no sistema de restrições do problema, formam uma matriz identidade. As variáveis pertencentes a essa base são denominadas variáveis básicas e caracterizam a solução corrente do problema, podendo assumir valores diferentes de zero, os quais são obtidos diretamente a partir dos termos independentes das equações. Em contrapartida, as variáveis que não integram a base são chamadas de variáveis não básicas e, em cada iteração do algoritmo, assumem valor igual a zero.

Essa estrutura é fundamental para o funcionamento do método Simplex, pois permite a realização de trocas sucessivas entre variáveis básicas e não básicas, conduzindo o algoritmo de uma solução viável para outra até a obtenção da solução ótima O Simplex se insere numa estrutura que pode ser resumido em três etapas principais que se repetem até a obtenção da solução ótima, seguindo tal ordem:

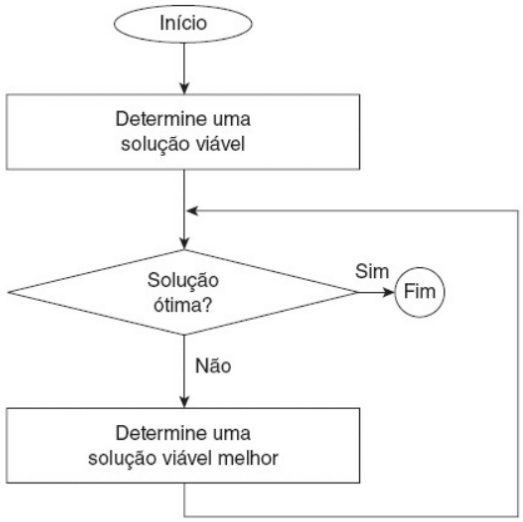
1. Determinar uma solução básica factível inicial.

2. Identificar a variável não básica que deve entrar na base e a variável básica que deve sair, de modo a gerar uma nova solução viável com melhor valor para a função objetivo.

3. Repetir o processo iterativo até que a solução ótima seja alcançada.

A figura a seguir ilustra esses três passos:

Figura 2.9: Principais passos do método simplex



Fonte: Lachtermacher (2009)

Logo acima foram exibidas as três etapas para se chegar à solução ótima, tais etapas podem ser realizadas e detalhadas por passos esmiuçados. Através de um exemplo, será destrinchado os passos detalhados do método simplex por meio de tabelas:

Exemplo 2.9. *Encontre a solução ótima do problema a seguir:*

$$\begin{aligned} max\ z = 6x_1 + 7x_2 \\ sujeito\ a: \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1º passo: tendo $z = 6x_1 + 7x_2$, é preciso subtrair $6x_1 + 7x_2$ em ambos os lados da função objetivo. E transformar o problema para a forma padrão, para isso será adicionada uma variável de folga em cada uma das restrições, ficando da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z - 6x_1 - 7x_2 = 0 \\ \text{sujeito a:} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_4 = 40 \\ x_2 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2º passo: definir uma solução básica inicial. Podemos adotar $x_1 = x_2 = 0$, isso porque problemas com $x_1, x_2 \geq 0$ tem o ponto $(0, 0)$ pertencente ao conjunto da região factível. Teremos então:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ 0 + 0 + x_3 = 15 &\Rightarrow x_3 = 15 \\ 0 + 0 + x_4 = 40 &\Rightarrow x_4 = 40 \\ 0 + x_5 = 6 &\Rightarrow x_5 = 6 \end{aligned}$$

3º passo: a partir da obtenção da solução básica inicial, esta será organizada na forma do tabular simplex:

Essa estrutura tabular consiste em uma disposição matricial dos coeficientes do sistema de restrições e da função objetivo, permitindo visualizar de forma organizada o processo de resolução do método. Na tabela, as linhas representam as equações do problema, isto é, as restrições e a função objetivo, que se encontra na última linha. Já as colunas representam as variáveis do modelo, incluindo variáveis de decisão e variáveis de folga. Além disso, existe uma coluna adicional, denominada b, que contém os termos independentes das equações.

A coluna **base** indica quais variáveis são consideradas variáveis básicas em cada linha do sistema. Essas variáveis correspondem às colunas que tem valores unitários, garantindo que seus valores possam ser obtidos diretamente a partir da coluna b. As demais colunas representam as variáveis não básicas, que assumem valor zero na solução.

Na última linha do tableau encontra-se a função objetivo Z, cujos coeficientes indicam o impacto de cada variável na otimização do problema, sendo fundamentais para a identificação do próximo passo do método Simplex.

Dessa forma, o simplex tabular organiza o problema em uma estrutura sistemática que facilita a identificação da base atual, a análise da função objetivo e a realização das operações iterativas necessárias para a obtenção da solução ótima.

Tabela 2.2: Solução básica inicial na forma tabular do simplex

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	3	2	1	0	0	15
2	x_4	5	8	0	1	0	40
3	x_5	0	1	0	0	1	6
4	Z	-6	-7	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

4º passo: Tendo o problema expresso pelo tabular simplex, o próximo passo é fazer o teste da otimalidade. Esse teste consiste em analisar a linha 4 da função objetivo Z, visto que a linha tem coeficientes com valores negativos, conclui-se que a solução básica atual não é ótima. A partir disso, inicia-se a fase da iteração, composta por uma sequência ordenada de passos que conduzem à determinação de uma solução básica adjacente melhor.
5º passo (Iteração): Determina-se a variável não básica que entrará na base escolhendo aquela que apresenta o maior coeficiente negativo na linha 4 da função objetivo Z da tabela2.11.1. Neste caso, o coeficiente de x_2 é -7, logo, x_2 é selecionada para entrar na base. Para o problema em análise, x_2 é a variável com maior contribuição unitária para a função objetivo Z assim, a coluna correspondente a x_2 é definida como a coluna pivô.

Tabela 2.3: Coluna Pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	3	2	1	0	0	15
2	x_4	5	8	0	1	0	40
3	x_5	0	1	0	0	1	6
4	Z	-6	-7	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

6º passo (1ª Iteração): Determina-se a variável básica que sairá da base, para isso é necessário dividir os coeficientes da coluna independente b pelos coeficientes positivos ($a_i > 0$) da coluna pivô, nesse caso a coluna x_2. Com excessão do coeficiente da linha Z, cada coeficiente da coluna b será respectivamente dividido pelo coeficiente da mesma linha da coluna pivô. Teremos então $b_1 = \frac{15}{2}, b_2 = \frac{40}{8}, b_3 = \frac{6}{1}$, basta agora determinar o menor entre os quocientes positivos e definir a linha a qual ele pertence como a linha pivô.

Tabela 2.4: Linha pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b	b_i/a_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	x_3	3	2	1	0	0	15	$\frac{15}{2} = 7,5$
2	x_4	5	8	0	1	0	40	$\frac{40}{8} = 5$
3	x_5	0	1	0	0	1	6	$\frac{6}{1} = 6$
4	Z	-6	-7	0	0	0	0	

6º passo (1ª Iteração): Estabelece-se o número pivô, que será o coeficiente em que intersecta linha e coluna pivô.

Tabela 2.5: Número pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b	b_i/a_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	x_3	3	2	1	0	0	15	$\frac{15}{2} = 7,5$
2	x_4	5	8	0	1	0	40	$\frac{40}{8} = 5$
3	x_5	0	1	0	0	1	6	$\frac{6}{1} = 6$
4	Z	-6	-7	0	0	0	0	

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

7º passo (1ª Iteração): A forma de se calcular os valores da nova linha pivô é dada por:

$$\text{nova linha pivô} \rightarrow \frac{1}{\text{número pivô}} \cdot \text{linha pivô atual}$$

Tabela 2.6: Nova linha Pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	3	2	1	0	0	15
2	x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	5
3	x_5	0	1	0	0	1	6
4	Z	-6	-7	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

8º passo (1ª Iteração): O cálculo para as demais linhas incluindo Z também será aplicado apenas para os coeficientes das variáveis, da seguinte maneira:

Nova linha = (linha atual)−(coeficiente da coluna pivô da linha atual)×(nova linha pivô)

O objetivo é zerar os elementos acima e abaixo do pivô por meio de operações elementares nas linhas.

$$L_1 \to L_1 - 2L_2$$

$$L_3 \to L_3 - L_2$$

$$L_4 \to L_4 - (-7)L_2 = L_4 + 7L_2$$

Sendo a nova linha pivô a linha em destaque do quadro 2.6. Feito os cálculos teremos o novo quadro:

Tabela 2.7: Demais linhas

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	$\frac{7}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	5
2	x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	5
3	x_5	$-\frac{5}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	1	1
4	Z	$-\frac{13}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$	0	35

Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

Concluída a primeira iteração, será analisado a quarta linha, a linha da função objetivo. Visto que o objetivo da questão trabalhada é de maximização, e na linha Z ainda tem valores negativos, deve-se realizar uma nova iteração seguindo todo o procedimento da primeira interação.

5º passo (2ª Iteração): Determinar coluna pivô pelo critério de escolha a partir do menor coeficiente da linha da função objetivo.

Tabela 2.8: Segunda interação: coluna pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	$\frac{7}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	5
2	x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	5
3	x_5	$-\frac{5}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	1	1
4	Z	$-\frac{13}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$	0	35

Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

6º passo (2ª Iteração): Determinar linha pivô. Feito $\frac{b_i}{a_i}$ com $a_i > 0$ para determinar qual variável que sairá da base, escolhe-se o menor quociente positivo porque ele mostra qual variável básica chega a zero primeiro quando a variável que entra na base aumenta. Assim, essa variável sai da base sem que nenhuma outra fique negativa, mantendo a solução viável. Os candidatos foram $\frac{20}{7}$ e 8, escolhendo o menor entre eles, a linha pivô será a em destaque na tabela abaixo:

Tabela 2.9: Segunda iteração: linha pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b	b_i/a_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	x_3	$\frac{7}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	5	$\frac{5}{\frac{7}{4}} = \frac{20}{7}$
2	x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	5	$\frac{5}{\frac{5}{8}} = 8$
3	x_5	$-\frac{5}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	1	1	
4	Z	$-\frac{13}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$	0	35	

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

7º passo (2ª Iteração): Coeficiente que intersecta a linha pivô com a coluna pivô.

Tabela 2.10: Segunda interação: número pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_1	$\frac{7}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	5
2	x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	5
3	x_5	$-\frac{5}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	1	1
4	z	$-\frac{13}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$	0	35

Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

6º passo (2ª Iteração): Divisão da linha pivô pelo número pivô:

$$L_1 \to \frac{1}{\frac{7}{4}} \cdot L_1 = \frac{4}{7} \cdot L_1$$

Tabela 2.11: Segunda interação: número pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_1	1	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{20}{7}$
2	x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	5
3	x_5	$-\frac{5}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	1	1
4	z	$-\frac{13}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$	0	35

Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

Tabela 2.12: Segunda interação: demais linhas (solução ótima)

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**					b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_1	1	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{20}{7}$
2	x_2	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{45}{14}$
3	x_5	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{13}{14}$	1	$\frac{39}{14}$
4	z	0	0	$\frac{13}{14}$	$\frac{9}{14}$	0	$\frac{555}{14}$

Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

Como a linha da função objetivo não contém coeficientes negativos, conclui-se que não é possível aumentar o valor de Z por meio de uma nova variável que entre na base. Portanto, a solução apresentada no quadro simplex é ótima.

Variáveis de decisão:

$$x_1 = \frac{20}{7}$$
$$x_2 = \frac{45}{14}$$

Valor máximo:

$$z = \frac{555}{14}.$$

Tendo encontrado os valores das variáveis de decisão, basta substituí-los na função objetivo max $z = 6x_1 + 7x_2$.
Substituindo os valores encontrados na função objetivo:

$$Z = 6x_1 + 7x_2$$

$$Z = 6\left(\frac{20}{7}\right) + 7\left(\frac{45}{14}\right)$$

$$Z = \frac{120}{7} + \frac{315}{14}$$

$$Z = \frac{240}{14} + \frac{315}{14}$$

$$Z = \frac{555}{14}$$

$$Z \approx 39{,}64.$$

Capítulo 3

Modelagem e otimização do cultivo de Banana

Após a apresentação dos fundamentos da Programação Linear e do método Simplex no capítulo anterior, torna-se possível aplicar essas ferramentas na resolução de problemas reais. No setor agrícola, a utilização eficiente dos recursos disponíveis é um fator determinante para a obtenção de melhores resultados produtivos e econômicos. Nesse contexto, o cultivo da banana destaca-se como uma atividade de grande relevância econômica, exigindo planejamento adequado quanto ao uso de recursos como área cultivável, água para irrigação e mão de obra. Dessa forma, a aplicação de técnicas de Programação Linear permite desenvolver modelos capazes de auxiliar na tomada de decisões, buscando a melhor alocação desses recursos e contribuindo para o aumento da produtividade e da rentabilidade da atividade agrícola.

Considerando a importância da otimização dos recursos no processo produtivo, este capítulo tem como objetivo apresentar a modelagem matemática aplicada ao cultivo de banana por meio da Programação Linear. Para isso, serão definidas as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições que representam as limitações do sistema produtivo. Em seguida, o modelo formulado será analisado com base nos procedimentos do método Simplex, permitindo identificar a solução ótima para o problema proposto e demonstrar a aplicabilidade dessa ferramenta no apoio à gestão agrícola.

A cultura da banana exerce papel fundamental na fruticultura brasileira, figurando entre as mais importantes atividades agrícolas do país. Sua relevância pode ser observada pelos elevados índices de área colhida, quantidade produzida, valor da produção e consumo interno. O cultivo é realizado por produtores de diferentes escalas, desde pequenos agricultores familiares até grandes produtores comerciais. Nesse contexto, a bananicultura apresenta não apenas importância econômica, mas também social, visto que cerca de 60% da produção nacional está vinculada à agricultura familiar, constituindo uma importante fonte de renda e desenvolvimento para diversas regiões do Brasil.(BORGES; SOUZA, 2004).

Segundo Borges e Souza (2004), a produção de banana, assim como em qualquer atividade agrícola, existem diversos custos que influenciam o resultado econômico da propriedade. Entre os principais fatores que afetam esses custos estão as condições do solo e do clima, a quantidade de mudas plantadas por área, os gastos com irrigação, adubação e manutenção da lavoura, além do controle de pragas e doenças. Esses elementos podem aumentar ou reduzir os custos de produção e impactar diretamente a produtividade da cultura. Por isso, é importante realizar um planejamento adequado dos recursos disponíveis, buscando maior eficiência e melhores resultados econômicos.

Essa necessidade de planejamento é ainda mais importante para os pequenos produtores, que geralmente trabalham com recursos limitados. Em muitas propriedades, a área disponível para plantio, a quantidade de água para irrigação, a mão de obra e os recursos financeiros são restritos, o que exige escolhas cuidadosas sobre como utilizar cada recurso da melhor forma possível. Nesse contexto, a Programação Linear pode ser utilizada como uma ferramenta de apoio à tomada de decisão, ajudando a identificar as melhores alternativas de produção e a aproveitar os recursos disponíveis de maneira mais eficiente, buscando aumentar a produtividade e os resultados econômicos da propriedade.

3.1 Formulação matemática do modelo

Devido à limitada disponibilidade de informações detalhadas e padronizadas sobre os custos de produção das diferentes variedades de banana, optou-se pela utilização de dados hipotéticos na construção dos modelos de programação linear. Contudo, os valores adotados foram definidos com base em referências técnicas disponíveis na literatura e em coeficientes compatíveis com a realidade da atividade bananicultora, de modo a garantir a coerência e a aplicabilidade dos cenários analisados. Dessa forma, os resultados obtidos não representam uma propriedade específica, mas servem para demonstrar a aplicação da programação linear como ferramenta de apoio à tomada de decisão no planejamento da produção agrícola.

3.2 Problema de programação linear no contexto rural (Método Gráfico)

O agricultor Anderson, produtor rural do interior da Bahia, possui uma propriedade de 30 hectares irrigados destinada ao cultivo de banana. A atividade representa sua principal fonte de renda, e ele busca melhorar a rentabilidade da produção por meio de um melhor planejamento agrícola.

Atualmente, Anderson pode cultivar duas variedades de banana em sua propriedade:

- Banana da Prata.

- Banana da Terra.

Devido às limitações de recursos produtivos como mão de obra e disponibilidade hídrica, conforme apresentado na tabela abaixo, o agricultor deseja definir a melhor combinação de áreas plantadas com cada variedade, de forma a maximizar o lucro anual da propriedade.

Custos	**Banana Prata**	**Banana Terra**
Lucro líquido (R$/ha)	19.000	25.000
Mão de obra (dias-homem/ha)	120	180
Consumo de água (m^3/ha)	9.000	12.000

Disponibilidade de recursos na propriedade de Anderson:

- Área total disponível: 30 hectares.
- Mão de obra disponível: 4.500 dias-homem.
- Água disponível para irrigação: $300.000m^3$

3.2.1 Variáveis de decisão

Nesta etapa do modelo de Programação Linear, são estabelecidas as variáveis de decisão, as quais representam as quantidades desconhecidas que serão determinadas pela solução do problema. Essas variáveis estão diretamente relacionadas à alocação dos recursos produtivos disponíveis na propriedade do agricultor Anderson.
No presente estudo, considera-se que Anderson possui duas alternativas de cultivo em sua área agrícola, sendo necessário definir a distribuição ótima entre elas.
Assim, definem-se as seguintes variáveis:

- x_1: área, em hectares, destinada ao cultivo da variedade Banana Prata na propriedade do agricultor Anderson;
- x_2: área, em hectares, destinada ao cultivo da variedade Banana Terra na propriedade do agricultor Anderson.

Dessa forma, x_1 e x_2 representam as decisões do produtor quanto à distribuição da área disponível entre as duas culturas analisadas, sendo expressas em hectares (ha). Essas variáveis servirão como base para a construção da função objetivo e das restrições do modelo matemático.
Adicionalmente, estabelece-se a condição de não negatividade, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, uma vez que não é possível destinar valores negativos de área ao cultivo:

3.2.2 Função objetivo

A função objetivo indica o que se deseja otimizar no problema. Neste caso, o agricultor Anderson busca maximizar o lucro total da produção de banana em sua propriedade. Considerando os lucros por hectare de cada variedade:

- Banana da Terra: $R\$25.000/ha$
- Banana da Prata: $R\$19.000/ha$

A função objetivo é dada por:

$$\max Z = 19000x_1 + 25000x_2 \tag{3.1}$$

onde:

- (Z) é o lucro total;
- x_1 é a área de Banana da Prata (ha)
- x_2 é a área de Banana da Terra (ha)

Assim, o modelo busca a melhor combinação de áreas para gerar o maior lucro possível.

3.2.3 Restrições

As restrições representam as limitações de recursos existentes na propriedade do agricultor Anderson e determinam os limites dentro dos quais o modelo deve ser resolvido.

No presente problema, consideram-se três principais recursos: área disponível, mão de obra e disponibilidade de água para irrigação.

Restrição de área

A área total disponível para cultivo de 30 hectares, sendo que toda a produção deve ocorrer dentro desse limite:

$$x_1 + x_2 \leq 30 \tag{3.2}$$

Restrição de mão de obra

A disponibilidade de trabalho na propriedade é de 4.500 dias-homem. Cada hectare cultivado exige uma quantidade específica de mão de obra:

$$120x_1 + 180x_2 \leq 4500 \tag{3.3}$$

Simplificando a inequação teremos:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 75 \tag{3.4}$$

Restrição de água para irrigação

A quantidada de água disponível para irrigação é limitada a 300.000 m^3, sendo que cada variedade consome diferentes volumes:

$$9000x_1 + 12000x_2 \leq 300000 \tag{3.5}$$

Simplificando a inequação teremos:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100 \tag{3.6}$$

Restrição de não negatividade

Como não é possível cultivar áreas negativas, temos:

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3.7}$$

3.2.4 Formulação final do modelo

Com base na determinação das variáveis de decisão, da função objetivo e das restrições do problema, o modelo de Programação Linear pode ser formalizado matematicamente da seguinte forma:

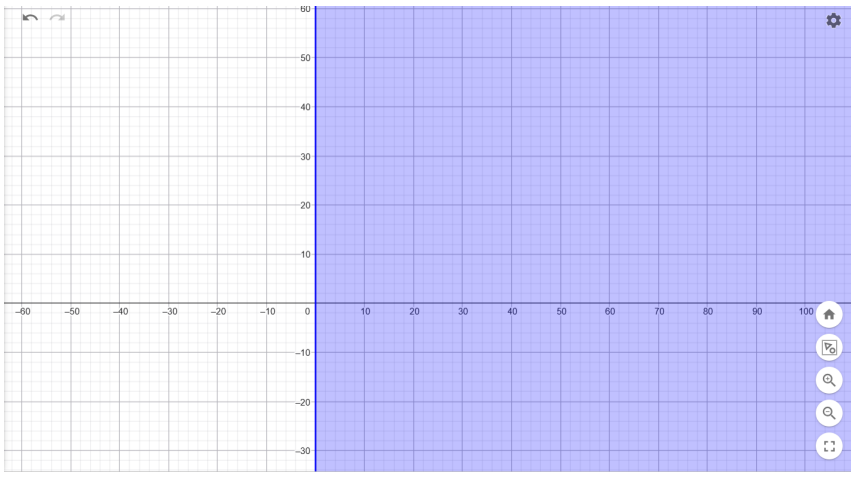
$$\begin{aligned} \max z = f(x_1, x_2) &= 19000x_1 + 25000x_2 \\ \text{sujeito a:} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 75 \\ x_1 + x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2.5 Resolução do problema pelo método gráfico

No problema acima, por ter apenas duas variáveis de decisão, é possível ser resolvido pelo método gráfico.Adotando x_1 e x_2 respectivamente como x e y, seguiremos os passos de determinar a região factível a partir do conjunto de restrições:

1ª restrição:

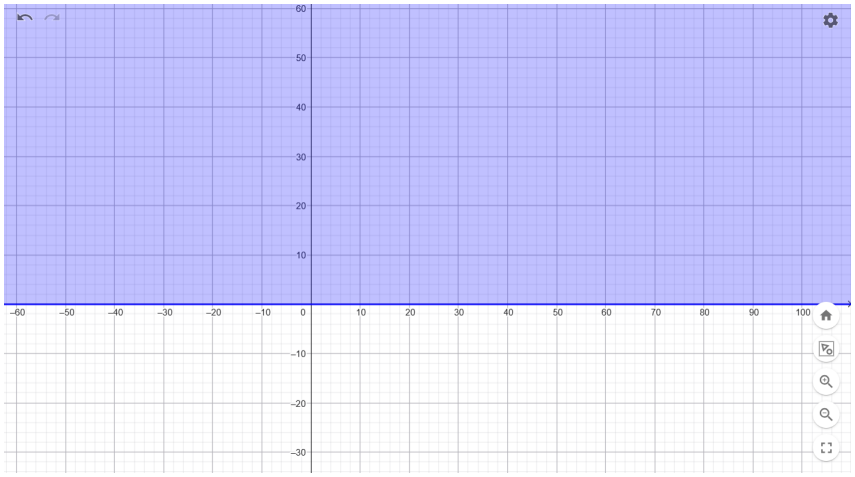
Figura 3.1: $x_1 \geq 0$



Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

2ª restrição:

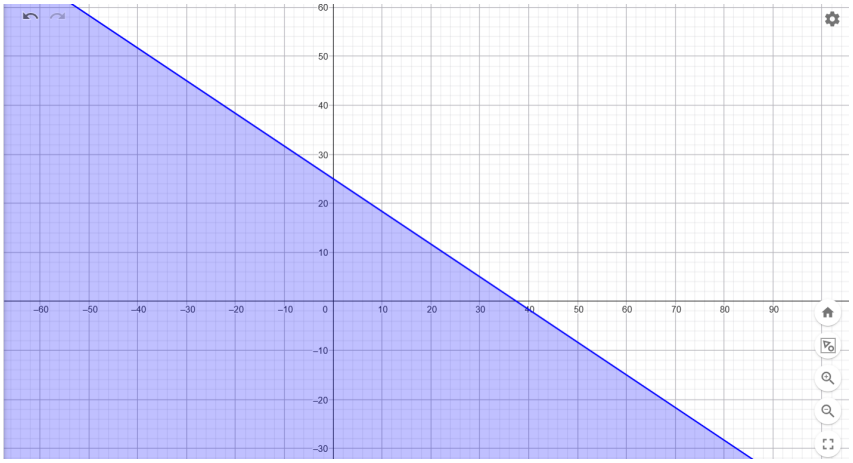
Figura 3.2: $x_2 \geq 0$



Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

3ª restrição:

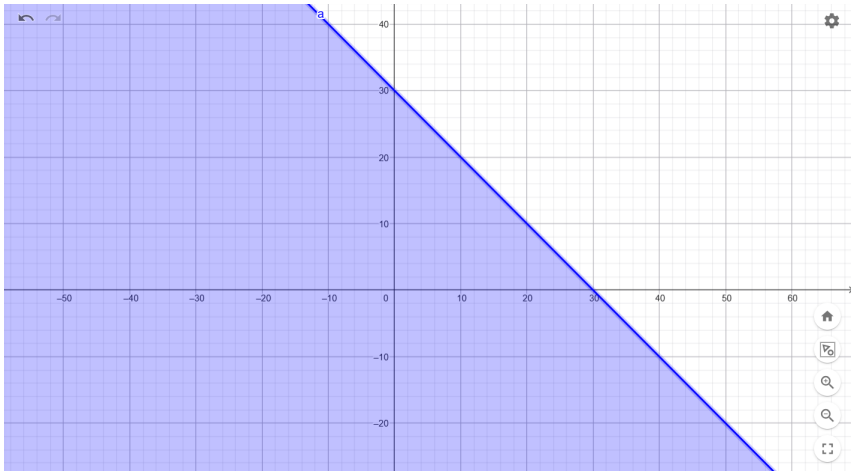
Figura 3.3: $2x_1 + 3x_2 \leq 75$



Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

4ª restrição:

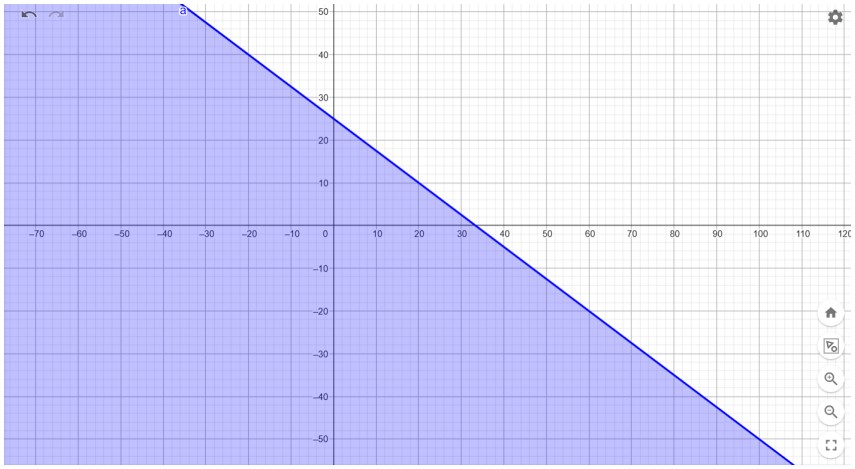
Figura 3.4: $x_1 + x_2 \leq 30$



Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

5ª restrição:

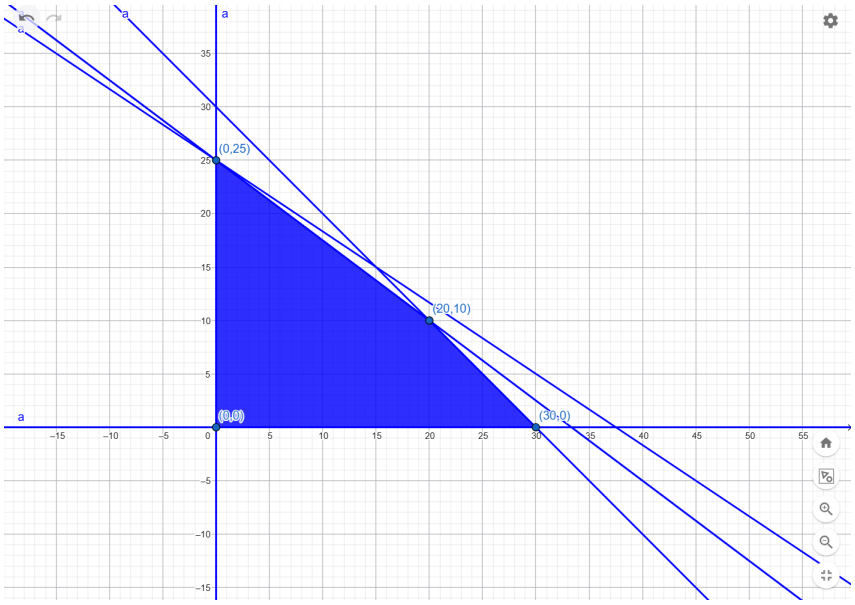
Figura 3.5: $3x_1 + 4x_2 \leq 100$



Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

Interseção das restrições:

Figura 3.6: Região factível



Fonte: Elaborado pelo autor(2026)

A região factível apresentada na figura 3.6 é delimitada pelos vértices $(0, 0)$, $(0, 25)$, $(20, 10)$ e $(30, 0)$, que correspondem aos pontos de interseção entre as restrições do problema. Sabendo que a solução ótima de uma função objetivo linear ocorre em um dos vértices da região viável. Assim, para determinar o valor máximo da função ($Z = 19000x_1 + 25000x_2$), torna-se necessário avaliar a função objetivo em cada um desses pontos extremos e comparar os resultados obtidos, identificando aquele que proporciona o maior valor para (Z).

Testaremos os pontos acima para concluir qual será o candidato para maximizar a função $z = 19000x_1 + 25000x_2$:

Para $(0, 0)$:

$$\max Z = 19000x_1 + 25000x_2 \Rightarrow Z = 0 \tag{3.9}$$

Para $(0, 25)$:

$$\max Z = 19000x_1 + 25000x_2 \Rightarrow Z = 19000.(0) + 25000.(25) \Rightarrow Z = 625000 \tag{3.10}$$

Para $(20, 10)$:

$$\max Z = 19000x_1 + 25000x_2 \Rightarrow Z = 19000.(20) + 25000.(10) \Rightarrow \ Z = 630000 \tag{3.11}$$

Para $(30, 0)$:

$$\max Z = 19000x_1 + 25000x_2 \Rightarrow Z = 19000.(30) + 25000.(0) \Rightarrow Z = 570000 \tag{3.12}$$

Analisando a aplicação dos pontos extremos na função objetivo, conclui-se que o ponto $(20, 10)$ é o par ordenado em que a função é maximizada. Portanto, a solução ótima obtida indica que, para maximizar o lucro da propriedade, o agricultor deve destinar 20 hectares ao cultivo da Banana da Prata e 10 hectares ao cultivo da Banana da Terra. Essa distribuição respeita as limitações impostas pelo problema, como limitação de área, mão de obra e disponibilidade hídrica da propriedade, permitindo alcançar um lucro máximo estimado de $R\$630.000$.

3.3 Problema de programação linear no contexto rural (Método Simplex)

João é o agricultor responsável por uma pequena cooperativa rural localizada em uma região produtora de banana na Bahia. Sua propriedade possui uma estrutura produtiva limitada, mas com potencial de geração de renda por meio do cultivo e beneficiamento da banana.

Atualmente, João trabalha com três linhas principais de produtos: banana da prata, banana nanica e banana chips desidratada. Cada um desses produtos possui características distintas de produção e comercialização, apresentando diferentes níveis de custo, uso de recursos e retorno financeiro.

A banana da prata e a banana nanica são vendidas naturais, exigindo menor processamento, enquanto a banana chips passa por um processo de desidratação, agregando valor ao produto final, porém demandando maior uso de recursos produtivos. Os produtos são produzidos semanalmente e comercializados em São Paulo, sendo que a banana da prata é comercializada por $R\$40,00$ a caixa, a banana nanica por $R\$35,00$ a caixa e a banana

chips desidratada por $R\$70,00$ a caixa . João enfrenta um problema recorrente em sua produção: a limitação de recursos disponíveis para atender simultaneamente todas as etapas do processo produtivo. Entre essas limitações estão:

- disponibilidade de mão de obra para colheita e preparo dos produtos;
- quantidade de bananas colhidas disponíveis para processamento;
- capacidade de embalagem e armazenamento dos produtos acabados.

Além disso, devido à alta demanda de mercado, João percebe que não consegue produzir tudo o que deseja, sendo necessário decidir estrategicamente quanto produzir de cada tipo de banana.Os recursos disponíveis são: 200 horas semanais de mão de obra, 160 cachos de banana disponíveis e 140 embalagens.

Recursos disponíveis	**Banana da prata**	**Banana nanica**	**Banana chips**
Horas de mão de obra/ caixa	2	3	4
Cachos de banana/ caixa	1	2	2
Embalagem / caixa	1	1	2

3.3.1 Variáveis de decisão

As variáveis de decisão representam as quantidades de cada produto que deverão ser produzidas semanalmente pela cooperativa, sendo definidas como:

- x_1: quantidade de caixas de banana da prata produzidas por semana;
- x_2: quantidade de caixas de banana nanica produzidas por semana;
- x_3: quantidade de caixas de banana chips produzidas por semana.

Por se tratar de quantidades produzidas, as variáveis devem satisfazer às condições de não negatividade, expressas por:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3.3.2 Função objetivo

A função objetivo indica o que se deseja otimizar no problema. Neste caso, o objetivo é maximizar o lucro total obtido com a comercialização dos produtos da cooperativa rural. Considerando os valores de venda por caixa de cada produto, têm-se:

- Banana da Prata: R$ $40,00$/caixa;
- Banana Nanica: R$ $35,00$/caixa;
- Banana Chips: R$ $70,00$/caixa.

Dessa forma, a função objetivo é dada por:

$$\max Z = 40x_1 + 35x_2 + 70x_3 \tag{3.13}$$

onde:

- (Z) é o lucro total obtido com a comercialização dos produtos;
- x_1 é a quantidade de caixas de banana da prata produzidas;
- x_2 é a quantidade de caixas de banana nanica produzidas;
- x_3 é a quantidade de caixas de banana chips produzidas.

3.3.3 Restrições

Restrição de mão de obra

A disponibilidade semanal é de 200 horas, sendo que cada caixa de banana da prata, banana nanica e banana chips consome, respectivamente, 2, 3 e 4 horas de trabalho:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 200 \tag{3.14}$$

Restrição de cachos de banana

A produção semanal dispõe de 160 cachos de banana. Cada caixa de banana da prata e banana nanica utiliza um cacho, enquanto a banana chips utiliza dois cachos.:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 160 \tag{3.15}$$

Restrição de embalagens

A quantidade de embalagens disponível para a produção semanal é limitada a 140 unidades. Cada caixa de banana da Prata e banana Nanica necessita de uma embalagem, enquanto cada caixa de banana Chips necessita de duas embalagens. Dessa forma, a restrição de embalagens é expressa por:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 140 \tag{3.16}$$

Como não é possível determinar quantidade negativa de caixas, temos:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{3.17}$$

3.3.4 Formulação final do modelo

Com base na função objetivo e nas restrições estabelecidas, o modelo de programação linear é formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max z = f(x_1, x_2, x_3) &= 40x_1 + 35x_2 + 70x_3 \\ \text{sujeito a:} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 200 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 160 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 140 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.3.5 Modelo na forma padrão

Após a definição do modelo matemático para o planejamento da produção de bananas, realiza-se a transformação para a forma padrão, tornando possível a aplicação do método Simplex. Para isso, são adicionadas variáveis de folga às restrições para transformar as inequações em equações, e a função objetivo é organizada conforme o método, permitindo a construção da tabela inicial e a resolução do problema. Dessa forma, introduzem-se as variáveis de folga x_4, x_5 e x_6 obtendo-se o sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 200 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 &= 160 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 &= 140 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

A função objetivo é escrita na forma de equação, conforme a estrutura utilizada no tableau Simplex.

$$Z - 40x_1 - 35x_2 - 70x_3 = 0$$

3.3.6 Solução básica inicial

Com o modelo na forma padrão, é necessário estabelecer a solução básica inicial, para isso consideramos as variáveis de decisão iguais a zero para que as variáveis de folga represente os recursos disponíveis. Essa configuração inicial permite a construção da

primeira tabela do método Simplex e serve como ponto de partida para a busca da solução ótima do problema.

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$0 + 0 + 0 + x_4 = 200 \Rightarrow x_4 = 200$$
$$0 + 0 + 0 + x_5 = 160 \Rightarrow x_5 = 160$$
$$0 + 0 + 0 + x_6 = 140 \Rightarrow x_6 = 140$$

Será iniciado o processo de iterações a partir da tabela que se configura como solução básica inicial a fim de obter a solução ótima ao atingirmos o critério de parada.

Tabela 3.1: Primeira iteração: coluna pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	2	3	4	1	0	0	200
2	x_5	1	2	2	0	1	0	160
3	x_6	1	1	2	0	0	1	140
4	Z	-40	-35	-70	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

1ª iteração (coluna pivô): Determina-se a variável não básica que entrará na base escolhendo aquela que apresenta o maior coeficiente negativo na linha 4 da função objetivo Z. Neste caso, o coeficiente de x_3 é -70 é selecionada para entrar na base, e a coluna correspondente é definida como coluna pivô.

Tabela 3.2: Solução básica inicial na forma tabular do simplex

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	2	3	4	1	0	0	200
2	x_5	1	2	2	0	1	0	160
3	x_6	1	1	2	0	0	1	140
4	Z	-40	-35	-70	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

1ª iteração (linha pivô): Determina-se a variável básica que sairá da base dividindo os coeficientes da coluna b pelos coeficientes positivos da coluna pivô. Obtém-se $\frac{200}{4} = 50$, $\frac{160}{2} = 80$ e $\frac{140}{2} = 70$. O menor quociente positivo é 50, definindo a linha de x_4 como linha pivô.

Tabela 3.3: Primeira iteração: linha pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b	b_i/a_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	x_4	2	3	4	1	0	0	200	$\frac{200}{4} = 50$
2	x_5	1	2	2	0	1	0	160	$\frac{160}{2} = 80$
3	x_6	1	1	2	0	0	1	140	$\frac{140}{2} = 70$
4	Z	-40	-35	-70	0	0	0	0	

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

1ª iteração (número pivô): Estabelece-se o número pivô, que corresponde ao coeficiente na intersecção da linha pivô com a coluna pivô, nesse caso, o valor 4.

Tabela 3.4: Primeira iteração: número pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	2	3	4	1	0	0	200
2	x_5	1	2	2	0	1	0	160
3	x_6	1	1	2	0	0	1	140
4	Z	-40	-35	-70	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

1ª iteração (nova linha pivô):A nova linha pivô é obtida dividindo-se todos os coeficientes da linha pivô atual pelo número pivô, ou seja:

$$\text{nova linha pivô} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot L_1$$

Tabela 3.5: Primeira iteração: nova linha pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	50
2	x_5	1	2	2	0	1	0	160
3	x_6	1	1	2	0	0	1	140
4	Z	-40	-35	-70	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

1ª iteração (demais linhas): As demais linhas são recalculadas de modo a zerar os coeficientes da coluna pivô, por meio de:

$$L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1$$

$$L_4 \rightarrow L_4 + 70L_1$$

Tabela 3.6: Primeira iteração: demais pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	50
2	x_5	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	60
3	x_6	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	40
4	Z	-5	$\frac{35}{2}$	0	$\frac{35}{2}$	0	0	3500

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Concluída a primeira iteração, a linha Z ainda apresenta um coeficiente negativo (5), referente a x_1 portanto a solução obtida ainda não é ótima, sendo necessária uma nova iteração.

2ª iteração (coluna pivô): Determina-se a coluna pivô pelo critério do menor coeficiente da linha da função objetivo. O único coeficiente negativo é 5, referente a x_1 que define a nova coluna pivô.

Tabela 3.7: Segunda iteração: coluna pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	50
2	x_5	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	60
3	x_6	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	40
4	Z	-5	$\frac{35}{2}$	0	$\frac{35}{2}$	0	0	3500

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

2ª iteração (linha pivô): Como somente a linha de x_3 apresenta coeficiente positivo ($\frac{1}{2}$), com quociente $\frac{50}{\frac{1}{2}} = 100$ ela é definida como linha pivô, e x_1 substitui x_3 na base.

Tabela 3.8: Segunda iteração: linha pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b	b_i/a_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	50	$\frac{50}{1/2} = 100$
2	x_5	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	60	
3	x_6	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	40	
4	Z	-5	$\frac{35}{2}$	0	$\frac{35}{2}$	0	0	3500	

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

2ª iteração (número pivô): O número pivô é o coeficiente que intersecta a linha pivô com a coluna pivô, nesse caso, o valor $\frac{1}{2}$.

Tabela 3.9: Segunda iteração: número pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	50
2	x_5	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	60
3	x_6	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	40
4	Z	-5	$\frac{35}{2}$	0	$\frac{35}{2}$	0	0	3500

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

2ª iteração (nova linha pivô): A nova linha pivô é obtida dividindo-se a linha pivô atual pelo número pivô

$$\text{nova linha pivô} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot L_1 = 2L_1$$

Tabela 3.10: Segunda iteração: nova linha número pivô

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	0	100
2	x_5	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	60
3	x_6	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	40
4	Z	-5	$\frac{35}{2}$	0	$\frac{35}{2}$	0	0	3500

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

2ª iteração (nova linha pivô): Somente a quarta linha é alterada, pois os demais coeficientes da coluna pivô já estão zerados.

$$L_4 \rightarrow L_4 + 5L_1$$

Tabela 3.11: Segunda iteração: demais linhas (solução ótima)

linha	**base**	**coeficientes das variáveis**						b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	0	100
2	x_5	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	60
3	x_6	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	40
4	Z	0	25	10	20	0	0	4000

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Como a linha Z resultante não apresenta mais coeficientes negativos, conclui-se que a solução ótima foi alcançada.Analisando a tabela que resulta na solução factível, percebe-se que dentre as variáveis de decisão, somente x_1 está na base pois $x_2 = x_3 = 0$. Portanto a solução que maximiza o lucro é

$$Z = 40x_1 + 35x_2 + 70x_3$$

$$Z = 40\,(100) + 35\,(0) + 70\,(0)$$

$$Z = 4000$$

Além da variável de decisão x_1, a base é constituída por duas variáveis de folga, x_5 e x_6, que valem 60 e 40, respectivamente. Essas variáveis representam a quantidade de cada recurso que não foi utilizada na solução ótima, permitindo avaliar quais recursos ainda apresentam disponibilidade e qual deles restringiu efetivamente a produção.

- x_4 é a variável de folga relativa à restrição de mão de obra disponível, $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 200$, que ao ser adicionada na inequação resulta em $2x_1+3x_2+4x_3+x_4 = 200$. Sendo $x_1 = 100$ e $x_2 = x_3 = 0$, tem-se $2(100) + 3(0) + 4(0) + x_4 = 200 \Rightarrow x_4 = 0$. O fato de x_4 não integrar a base final, assumindo valor nulo, indica que toda a mão de obra disponível foi utilizada.

- x_5 é a variável de folga em relação à restrição de cachos de banana disponíveis, $x_1 + 2x_2+2x_3 \leq 160$, que ao ser adicionada na inequação resulta em $x_1+2x_2+2x_3+x_5 = 160$. Sendo $x_1 = 100$ e $x_2 = x_3 = 0$, tem-se $100+2(0)+2(0)+x_5 = 160 \Rightarrow x_5 = 60$.

- x_6 é a variável de folga em relação à restrição de embalagens disponíveis, $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 140$, que ao ser adicionada na inequação resulta em $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 140$. Sendo $x_1 = 100$ e $x_2 = x_3 = 0$, tem-se $100 + 0 + 2(0) + x_6 = 140 \Rightarrow x_6 = 40$.

Conclui-se emtão que a solução ótima para o problema de produção da cooperativa de João consiste na fabricação exclusiva de $x_1 = 100$ caixas semanais de banana da prata, não sendo recomendada a produção de banana nanica ($x_2 = 0$) ou de banana chips desidratada ($x_3 = 0$). Essa alocação resulta em um lucro máximo de $Z = \text{R\$}4.000,00$ por semana.

Capítulo 4

Considerações Finais

Em conclusão, o atual trabalho teve como objetivo expor e compreender os principais conceitos da Programação Linear além de evidenciar sua utilização na solução de problemas relacionados a maximização de lucro no cultivo e comercialização de banana. Para atingir os objetivos propostos, de início foi feita a fundamentação teórica acerca da Programação Linear e suas técnicas de otimização, para que posteriormente tais técnicas fossem aplicadas em situações agrícolas.

Os resultados encontrados apresentam a eficácia da Programação Linear como ferramenta para o uso de recursos limitados, possibilitando definir as escolhas que resulte em lucro máximo. Dessa forma, sua aplicacabilidade é capaz de proporcionar suporte em todo setor agrícola para operar seus planejamentos.

Torna-se necessário salientar que todos os dados que compuseram os exemplos foram hipotetizados baseados em situações possivelmente reais. Com isso, os resultados servem apenas para demonstrar como a Programação Linear pode ser aplicada manualmente na prática, e não representam uma situação real. Como sugestão para trabalhos futuros, seria interessante aplicar a metodologia utilizando dados reais de produtores rurais.

Referências

ALMEIDA, M. R. Programação linear: uma aplicação ao problema de compras de um supermercado da cidade de macaúbas-ba. *Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia*, Vitória da Conquista, 2018. Orientador: Júlio César dos Reis.

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. *Pesquisa Operacional: Para cursos de Engenharia*. Rio de Janeiro: Campus / Elsevier, 2013.

BORGES, A. L.; SOUZA, L. d. S. *O cultivo da banana*. Cruz das Almas, BA: Embrapa Mandioca e Fruticultura, 2004. Disponível em: <http://frutvasf.univasf.edu.br/images/banana2.pdf>. Acesso em: 29 maio 2026.

ESTEVÃO, J. M. C. *Introdução à Investigação Operacional: Programação Linear*. Faro, 1998.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

LACHTERMARCHER, G. *Pesquisa operacional: na tomada de decisões / Gerson Lachtermacher*. 4.ed.. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. Inclui índice.

LIMA, E. L. *Curso de Análise. Volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. (Projeto Euclides).

Mais Agro; Syngenta. *Dia da Banana: curiosidades e história da fruta no Brasil*. n.d. Disponível em: <https://maisagro.syngenta.com.br/dia-a-dia-do-campo/dia-da-banana-curiosidades-e-historia-da-fruta-no-brasil/>. Acesso em: 15 jan. 2026.

MARINS, F. A. S. *Introdução à Pesquisa Operacional*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.

OLIVEIRA, V. M. de. *Um Estudo do Conceito de Algoritmo Aplicado à Composição de Partituras de Instrução Direta*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2021. Programa de Pós-Graduação em Música.

SCHRIJVER, A. *Theory of Linear and Integer Programming*. Chichester: John Wiley & Sons, 1986.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

Anderson Guilherme Nascimento dos Santos

Otimização do Cultivo de Banana por meio da Programação Linear

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 12/08/2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Davis Magalhães de Freitas (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Prof. Me. Diego Lima Bomfim
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Prof. Dr. Edvan Santos da Trindade
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 05 de agosto de 2026.

Documento assinado eletronicamente por **Davis Magalhães de Freitas**, **Professor Efetivo**, em 14/08/2026, às 09:02, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **Diego Lima Bomfim**, **Professor Efetivo**, em 14/08/2026, às 11:46, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **EDVAN SANTOS DA TRINDADE**, **Professor Efetivo**, em 14/08/2026, às 18:57, conforme decreto nº 8.539/2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site http://sei.ifba.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&acao_origem=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **5016921** e o código CRC **E59D43BF**.